

الواجب منزلي رقم (02)

المستوى : 02 تقني رياضي

□ التمرين الأول:

(I) نعتبر الدالتان العدديتان f و g للمتغير الحقيقي x المعرفتان بـ: $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$ و $g(x) = \frac{x-7}{\sqrt{x-3}+2}$.

- (1) بين أن الدالتان لهما نفس مجموعة العريف D .
- (2) بين أنه من أجل كل x من D فإن: $f(x) = g(x)$ ، ماذا تستنتج؟
- (II) f دالة معرفة على المجال $[-4, 3]$ ، جدول تغيراتها كالاتي:

x	-4	-3	-2	-1	1	3
$f(x)$			1			-1
	-4	0		0	-3	

- (1) حدد إشارة $f(x)$
- (2) عين: $\frac{1}{f}(1)$ ، $-2f(-2)$ ، $f \circ f \circ f(-2)$
- (3) عين مجموعة تعريف كلا من الدالتين: $\sqrt{f}$ و $\frac{1}{f}$
- (4) عين إتجاه تغير الدوال: $|f|$ ، $\sqrt{f}$ ، $\frac{1}{f}$

□ التمرين الثاني:

نعتبر f الدالة المعرفة على D_f بـ: $f(x) = \frac{\alpha x + 7}{x + \beta}$ ، حيث α و β عددان حقيقيان، (C_f) هو التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) إذا علمت أن $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ و المنحنى (C_f) يشمل النقطة $(-1; 4)$ بين أن $\alpha = 3$ و $\beta = 2$.
 - (2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \neq -2$: $f(x) = a + \frac{b}{x+2}$.
 - (3) بين أن الدالة f هي مركب دالتين مرجعيتين u و v يطلب تعيينهما حيث $f = u \circ v$.
 - (4) استنتج اتجاه تغير الدالة f على كلا المجالين $]-\infty; -2[$ و $]-2; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (5) بين بطريقتين مختلفتين أن النقطة $\Omega(-2; 3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
 - (6) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_f) انطلاقا من تمثيل بياني لدالة مرجعية، ثم أنشئ (C_f) .
 - (7) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ: $g(x) = \frac{3x+7}{|x+2|}$ ، (C_g) هو تمثيلها البياني.
- ◀ أكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$ ثم أنشئ (C_g) بالاعتماد على (C_f) مع التبرير.

التمرين الأول:

(1) أن الدالتان لهما نفس مجموعة العريف D.

$$D_f = \{x/x-3 \geq 0\}$$

$$D_f = \{x/x \geq 3\}$$

$$D_f = [3, +\infty[$$

$$D_g = \{x/x-3 \geq 0 \text{ و } \sqrt{x-3}+2 \neq 0\}$$

$$D_g = \{x/x \geq 3 \text{ و } x-3 \geq 0 \text{ و } \sqrt{x-3} \neq -2\}$$

$$D_g = \{x/x \in [3, +\infty[\text{ و } x \in [3, +\infty[\text{ و } \sqrt{x-3} \neq -2\}$$

$$D_g = \{x/x \in [3, +\infty[\text{ و } x \in [3, +\infty[\}$$

$$D_g = [3, +\infty[$$

إذن الدالتان لهما نفس مجموعة التعريف D = [3, +\infty[

(2) إثبات أنه من أجل كل x من D فإن f(x) = g(x)

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x-3}-2)(\sqrt{x-3}+2)}{(\sqrt{x-3}+2)}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-3}^2 - 2^2}{\sqrt{x-3}+2}$$

$$f(x) = \frac{x-3-4}{\sqrt{x-3}+2}$$

$$f(x) = \frac{x-7}{\sqrt{x-3}+2}$$

$$f(x) = g(x)$$

و عليه نستنتج أن الدالتين f و g متساويتين

(II)

(3) إشارة f(x)

x	-4	-3	-1	3	
$f(x)$	-	0	+	0	-

(4) تعيين : $\frac{1}{f}(1)$ ، $-2f(-2)$ ، $f \circ f \circ f(-2)$

$$\frac{1}{f}(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

$$-2f(-2) = -2 \times 1 = -2$$

$$f \circ f \circ f(-2) = f(f(f(-2))) = f(f(1)) = f(-3) = 0$$

(5) تعيين مجموعة تعريف كلا من الدالتين $\sqrt{f}$ و $\frac{1}{f}$ الدالة $\sqrt{f}$ معرفة لما $f(x) \geq 0$ ، من جدول إشارة الدالة f

$$D_{\sqrt{f}} = [-3, -1]$$

الدالة $\frac{1}{f}$ معرفة لما $f(x) \neq 0$ ، إذن

$$D_{\frac{1}{f}} = [-4, -3[\cup]-3, -1[\cup]-1, 3]$$

(6) تعيين اتجاه تغير الدوال : $|f|$ ، $\sqrt{f}$ ، $\frac{1}{f}$

الدالة |f|

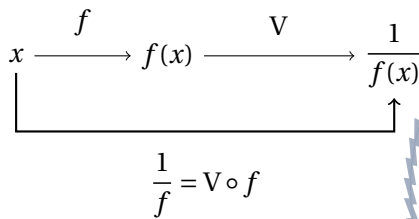
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & x \in [-3, -1] \\ -f(x) & x \in [-4, -3] \cup [-1, 3] \end{cases} \text{ أي}$$

إذن نستنتج أن من أجل كل x المجال [-3, -1] الدالة |f| لها نفس اتجاه تغير الدالة f أي أن الدالة |f| متزايدة تماما على المجال [-3, -2] و متناقصة تماما على المجال [-2, -1]

و من أجل كل x المجال [-4, -3] الدالة |f| و الدالة f متعاكستان في اتجاه التغير أي أن الدالة |f| متناقصة تماما

من أجل كل x المجال [-1, 3] الدالة |f| و الدالة f متعاكستان في اتجاه التغير أي أن الدالة |f| متزايدة تماما على المجال [-1, 1] و متناقصة تماما على المجال [1, 3]

الدالة $\frac{1}{f}$ 

$$V(x) = \frac{1}{x} \text{ حيث}$$

الدالة f متزايدة تماما على المجال [-4, -3[حيث من أجل كل عدد حقيقي من المجال [-4, -3[فإن $f(x) \in [-4, 0[$ و الدالة V متناقصة تماما على $[-4, 0[$ إذن الدالة $\frac{1}{f(x)}$ متناقصة تماما على المجال [-4, -3[الدالة f متزايدة تماما على المجال [-3, -2] حيث من أجل كل عدد حقيقي من المجال [-3, -2] فإن $f(x) \in]0, 1]$ و الدالة V متناقصة تماما على $]0, 1]$ إذن الدالة $\frac{1}{f(x)}$ متناقصة تماما على المجال [-3, -2]الدالة f متناقصة تماما على المجال [-2, -1] حيث من أجل كل عدد حقيقي من المجال [-2, -1] فإن $f(x) \in [1, 0[$ و الدالة V متناقصة تماما على $[1, 0[$ إذن الدالة $\frac{1}{f(x)}$ متزايدة تماما على المجال [-2, -1]الدالة f متناقصة تماما على المجال [-1, 1] حيث من أجل كل عدد حقيقي من المجال [-1, 1] فإن $f(x) \in [3, 0[$ و الدالة V متناقصة تماما على $[3, 0[$ إذن الدالة $\frac{1}{f(x)}$ متزايدة تماما على المجال [-1, 1]

(4) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f .

على المجال $]-\infty; -2[$

الدالة v متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -2[$ و من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]-\infty; -2[$ أي $x < -2$ و عليه $x + 2 < 0$ فإن $v(x) \in]-\infty; 0[$

و الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0[$

إذن f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -2[$

على المجال $]-2; +\infty[$

الدالة v متزايدة تماما على المجال $]-2; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]-2; +\infty[$ أي $x > -2$ و عليه $x + 2 > 0$ فإن $v(x) \in]0; +\infty[$

و الدالة u متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$

إذن f متناقصة تماما على المجال $]-2; +\infty[$

(5) إثبات أن النقطة $\Omega(-2; 3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

طريقة 01

باستخدام دساتير تغيير معلم يكون لدينا $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 3 \end{cases}$ بتعويض قيمة

x و y في معادلة منحنى الدالة f نجد عبارة الدالة f في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$$Y = \frac{1}{X} \quad \text{أي} \quad Y + 3 = 3 + \frac{1}{X - 2 + 2}$$

لتكن الدالة F حيث $F(X) = \frac{1}{X}$ و $D_F = \mathbb{R} - \{0\}$

إثبات أن الدالة $F(X)$ فردية :

من أجل كل $X \in \mathbb{R} - \{0\}$ فإن $-X \in \mathbb{R} - \{0\}$ و لدينا :

$$F(X) = \frac{1}{X} = -\frac{1}{-X} = -F(-X)$$

منه الدالة فردية و عليه النقطة $\Omega(-2; 3)$ مركز تناظر (C_f)

طريقة 02

ثبت أنه من أجل $x \in D_f$ و $x \in D_f$ و $(2(-2) - x) \in D_f$

$$\text{فإن } f(2(-2) - x) + f(x) = 2(3)$$

إثبات أن $-4 - x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ أي $x \neq -2$ و منه $-x \neq 2$ و منه $-4 - x \neq -2$ أي $-4 - x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ و لدينا :

$$f(-4 - x) + f(x) = 3 + \frac{1}{-4 - x + 2} + 3 + \frac{1}{x + 2}$$

$$f(-4 - x) + f(x) = 3 + \frac{1}{-x - 2} + 3 + \frac{1}{x + 2}$$

$$f(-4 - x) + f(x) = 6 + \frac{1}{-(x + 2)} + \frac{1}{x + 2}$$

$$f(-4 - x) + f(x) = 6 - \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 2}$$

$$f(-4 - x) + f(x) = 2(3)$$

الرسم

(C_f) هو صورة منحنى الدالة مقلوب بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

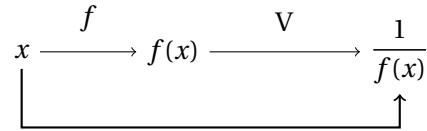
الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1, 3]$ حيث من أجل كل عدد حقيقي

من المجال $[1, 3]$ فإن $f(x) \in [-3, -1]$

و الدالة V متناقصة تماما على $[-3, -1]$

إذن الدالة $\frac{1}{f(x)}$ متناقصة تماما على المجال $[1, 3]$

الدالة $\sqrt{f}$



$$\frac{1}{f} = V \circ f$$

حيث $V(x) = \sqrt{x}$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-3, -2]$ حيث من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[-3, -2]$ فإن $f(x) \in [0, 1]$ و الدالة v متزايدة تماما على المجال $[0, 1]$

إذن الدالة $\sqrt{f}$ متزايدة تماما على المجال $[-3, -2]$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-2, -1]$ حيث من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[-2, -1]$ فإن $f(x) \in [0, 1]$ و الدالة v متزايدة تماما على المجال $[0, 1]$

إذن الدالة $\sqrt{f}$ متناقصة تماما على المجال $[-2, -1]$

التمارين الثاني :

(1) إثبات أن $\alpha = 3$ و $\beta = 2$.

الدالة f معرفة لما $x + \beta \neq 0$ أي $x \neq -\beta$

و بما مجموعة تعريف الدالة هي $\mathbb{R} - \{-2\}$ فإن $-\beta = -2$ أي $\beta = 2$

بما أن منحنى الدالة f يشمل النقطة $(-1, 4)$ معناه $f(-1) = 4$ بالتعويض

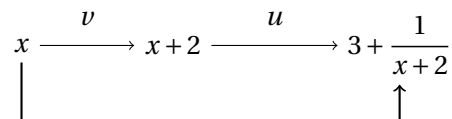
$$\text{نجد } \frac{-\alpha + 7}{-1 + 2} = 4 \quad \text{أي} \quad -\alpha + 7 = 4 \quad \text{و عليه} \quad \alpha = 3$$

(2) تعيين العددين a و b بالقسمة الإقليدية نجد

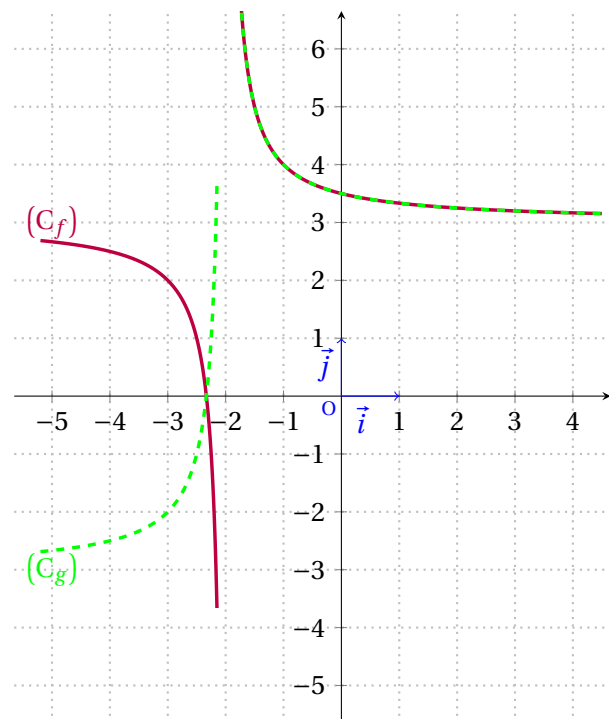
$$\begin{array}{r|l} 3x + 7 & x + 2 \\ -3x - 6 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

و منه $a = 3$ ، $b = 1$ أي $f(x) = 3 + \frac{1}{x + 2}$

(3) إثبات أن الدالة f هي مركب دالتين مرجعيتين u و v يطلب تعيينهما حيث $f = u \circ v$



حيث $v(x) = x + 2$ و $u(x) = 3 + \frac{1}{x}$



$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x+7}{x+2}; & x+2 \geq 0 \\ \frac{x+2}{3x+7}; & x+2 \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x); & x \geq -2 \\ -f(x); & x \leq -2 \end{cases} \quad \text{أي}$$

من أجل $x \geq -2$ (C_g) ينطبق على (C_f)

من أجل $x \leq -2$ (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل

