

عمل منزلي رقم (1) للثالثة ثانوي

من إقتراح : خالد مجاخشنة

التمرين:

- (I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 3$.
- (1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
ب- أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.37 < \alpha < -0.36$.
ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.
- (II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{(x-1)^2}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
- (2) أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : من أجل كل $x \neq 1$ ، $f(x) = x + a + \frac{bx}{(x-1)^2}$.
ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.
ج- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).
- (3) أ- بين أنه من أجل كل $x \neq 1$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$.
ب- أدرس إتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (4) بين أنه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب كتابة معادلة له.
- (5) أكتب معادلة المماس (T') للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
- (6) أ- بين أن : $f(\alpha) = 1 - \frac{8}{\alpha-1} - \frac{12}{(\alpha-1)^2}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.
ب- عين دون حساب : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$. فسر النتيجة بيانيا.
- (7) عين فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.
- (8) أنشئ كلا من (Δ) ، (T) ، (T') و (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.4$)
- (9) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$.
- (III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = -f(-|x|)$ ، و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.
- أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند 0.
- ب- بين أن الدالة h زوجية ، ثم أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

“ The only way to learn mathematics is to do mathematics ”

تصحيح العمل المنزلي

ذو المعادلة : $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

ج) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

ندرس اشارة الفرق : $f(x) - x = \frac{-4x}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-4x$	+	0	+	-
$(x-1)^2$	+	+	0	+
$f(x) - y$	+	0	-	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ) (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $O(0;0)$ (C_f) تحت (Δ)			(C_f) تحت (Δ)

١ ٣) بيان أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x - 3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 2x^2 - 3x)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2 + 7x + 3)}{(x-1)^4} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	+
$(x-1)^3$	-	0	-	+
$f'(x)$	+	0	-	+

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين : $]-\infty, \alpha]$

$[1, +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال : $[\alpha, 1[$.

▲ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$	$+\infty$

I) ١) حساب :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 7 > 0$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

٢) بيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

بما أن g مستمرة و متزايدة تماما على $[-0.37, -0.36]$.
و $g(-0.36) \times g(-0.37) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم
 $\underbrace{g(-0.36)}_{\approx 0.004} \times \underbrace{g(-0.37)}_{\approx -0.05}$

المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد α .

ب) اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II) ١) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{(x-1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{(x-1)^2} = +\infty$$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{(x-1)^2} = -\infty$$

٢) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

$$f(x) = x + a + \frac{bx}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^3 + (a-2)x^2 + (1-2a+b)x}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد : $a-2 = -2$ و $1-2a+b = -3$

ومنه : $a = 0$ و $b = -4$.

$$f(x) = x - \frac{4x}{(x-1)^2} \quad \text{اذن :}$$

ب) استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{(x-1)^2} = 0 \quad \text{بما أن :}$$



$$f(x) = x + m \spadesuit$$

قيم m	عدد و إشارة حلول المعادلة
$m < 0$	حليين موجبيين
$m = 0$	حل معدوم
$0 < m < 1$	حليين سالبين
$m = 1$	حل وحيد سالب
$m > 1$	لا يوجد حلول

$f(x) = mx$ ♣ : النقطة الثابتة هي المبدأ $O(0,0)$.

قيم m	عدد و إشارة حلول المعادلة
$m \geq 1$	حل معدوم
$-3 < m < 1$	حل معدوم و حليين مختلفين في الإشارة
$m \leq -3$	حل معدوم و حل موجب

$$h(x) = \frac{|x|^3 + 2x^2 - 3|x|}{(|x| + 1)^2} \quad \text{III}$$

① دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة 0 :

◀ من اليسار :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 2x^2 + 3x}{x(-x + 1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + 2x + 3}{(-x + 1)^2} = 3$$

h تقبل الاشتقاق على يسار 0 و منه : $h'_g(0) = 3$

◀ من اليمين :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x(x + 1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = -3$$

h تقبل الاشتقاق على يمين 0 و منه : $g'_d(0) = -3$

▲ بما أن $h'_d(0) \neq h'_g(0)$ فإن الدالة h لا تقبل الاشتقاق

عند القيمة 0 و المنحنى (C_h) يقبل نقطة زاوية عند

النقطة $O(0,0)$.

② بيان أن الدالة h زوجية :

من أجل كل x و $-x$ من $\mathbb{R} - \{1\}$ لدينا :

$$h(-x) = \frac{|-x|^3 - 2(-x)^2 - 3|-x|}{(|-x| - 1)^2}$$

$$= \frac{|x|^3 - 2x^2 - 3|x|}{(|x| - 1)^2} = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية.

④ بيان أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) :

$(T) // (\Delta)$ معناه لهما نفس معامل التوجيه

نحل المعادلة : $f'(x) = 1$

$$\frac{4x + 4}{(x - 1)^3} = 0 \quad \text{أي} \quad \frac{x^3 - 3x^2 + 7x + 3}{(x - 1)^3} = 1$$

ومنه : $x = -1$

نكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة -1 :

$$y_{(T)} = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = x + 1$$

⑤ كتابة معادلة المماس (T') عند الفاصلة 0 :

$$y_{(T')} = f'(0)(x - 0) + f(0) = -3x$$

$$f(\alpha) = 1 - \frac{8}{\alpha - 1} - \frac{12}{(\alpha - 1)^2} \quad \text{بيان أن : ⑥ ①}$$

$$f(\alpha) - 1 - \frac{8}{\alpha - 1} - \frac{12}{(\alpha - 1)^2} = \frac{\overbrace{g(\alpha)}^0}{(\alpha - 1)^2} = 0$$

▲ حصر $f(\alpha)$:

$$(1) \dots 6.84 < 1 - \frac{8}{\alpha - 1} < 6.88$$

$$(2) \dots -6.46 < -\frac{12}{(\alpha - 1)^2} < -6.39$$

نجمع (1) + (2) نجد : $0.38 < f(\alpha) < 0.49$

② تعيين دون حساب : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = 0$$

♣ التفسير الهندسي : (C_f) يقبل عند النقطة $(\alpha, f(\alpha))$

مماسا أفقي يوازي حامل محور الفواصل.

⑦ فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{(x - 1)^2} = 0 \quad \text{أي} \quad f(x) = 0$$

$$\text{أي} \quad x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \quad \text{أي} \quad x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

ومنه : $x = -1$ أو $x = 0$ أو $x = 3$.

⑨ المناقشة البيانية :

$$f(x) = m \spadesuit$$

قيم m	عدد و إشارة حلول المعادلة
$m < 0$	حليين موجبيين و حل سالب
$m = 0$	حل معدوم و حليين مختلفين في الإشارة
$0 < m < f(\alpha)$	حليين سالبين و حل موجب
$m = f(\alpha)$	حليين مختلفين في الإشارة
$m > f(\alpha)$	حل وحيد موجب

١ حساب $K'(x)$:

$$K'(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$$

♣ اشارة $K'(x)$:

x	$-\infty$	-1	α	0	1	3	$+\infty$
$2f'(x)$		+	+	0 -	-	+	+
$f(x)$		-	0 +	+	0 -	-	0 +
$K'(x)$		-	0 +	0 -	0 +	-	0 +

١ جدول تغيرات الدالة K :

x	$-\infty$	-1	α	0	1	3	$+\infty$
$K'(x)$		-	0 +	0 -	0 +	-	0 +
$K(x)$	$+\infty$		$f(\alpha)$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$
		0		0		0	

رسم (T) ، (Δ) ، (C_f) و (C_h) :