

اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المدة : ساعتان

يوم: 08 - 12 - 2022

المستوى : ثالثة علوم تجريبية - تقني رياضي

التمرين الأول: 03 نقاط

لكل سؤال اقتراح واحد فقط صحيح ، حدد الإجابة الصحيحة مع التبرير .

(1) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $-y' + 2y - 2 = 0$ الذي يحقق $y(0) = 2023$ هو :

(أ) $y = 2021e^{2x} - 1$ (ب) $y = 2022e^{2x} + 1$ (ج) $y = -2022e^{2x} + 3$

(2) المعادلة $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$:

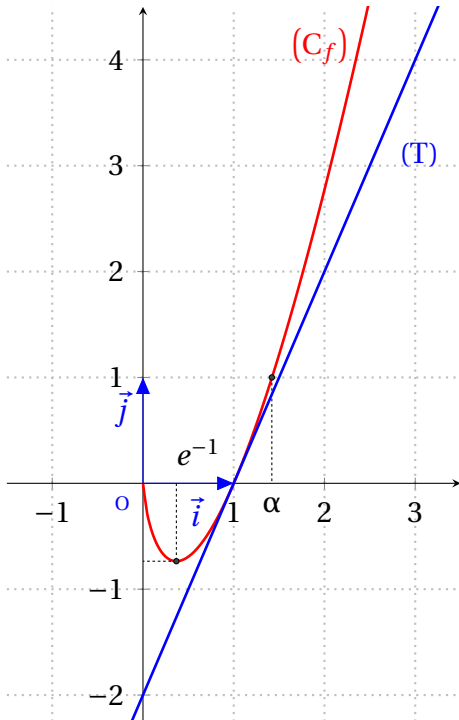
(أ) حلا على الأقل (ب) حلا وحيدا (ج) لا تقبل حولا في $\mathbb{R}$.

(3) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ ، فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$ تساوي :

(أ) $+\infty$ (ب) $-\infty$ (ج) 0

التمرين الثاني: 08 نقاط

في الشكل المقابل (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (C_f) يقبل قيمة حدية صغرى عند e^{-1} تساوي $-\frac{2}{e}$ ويقبل مماسا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$ يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق $1.3 < \alpha < 1.5$.
(I) بقراءة بيانية:



(1) عيّن $f(1)$ و $f'(1)$.

(2) حدّد حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$:

(أ) إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$.

(ب) وضعية (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = 1$.

(II) نقبل أن الدالة f معرفة بالعلاقة : $f(x) = (ax + b) \ln x$ حيث a و b عدنان حقيقيان .

(1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a و b .

(2) باستعمال المعطيات السابقة عيّن a و b .

(3) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - \ln[f(x)]$.

(أ) عبّر عن $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

(ب) أدرس إشارة $g'(x)$ على المجال $]1; +\infty[$.

(ج) استنتج اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

I نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+1)e^x - e$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0.5 < \alpha < 0.6$.

(3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^x - ex + e - 2$. نسمي (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أحسب $f'(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) أ) أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة: $y = -ex + e - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

ج) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (D) ، يطلب تعيين معادلة له.

(4) أنشئ كل من: (C_f) ، (D) و (T) . يعطى $f(\alpha) \approx 0.2$

(5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m+2-e)e^{-x} = x$.

III h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = e[(x+1)e^x - x]$.

(1) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = f(x+a) + b$.

(2) اشرح كيفية رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

التمرين الأول :

تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:
(1) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $-y' + 2y - 2 = 0$ الذي يحقق $y(0) = 2023$ هو: (ب) $y = 2022e^{2x} + 1$.

التبرير: لدينا: $-y' + 2y - 2 = 0$ تكافئ $y' = 2y - 2$ وهي معادلة تفاضلية من الرتبة 1 حلولها الدوال من الشكل: $y = Ce^{2x} + 1$ مع C عدد حقيقي ثابت. ولدينا $2023 = y(0) = Ce^0 + 1$ إذن $C = 2022$ ومنه $C = 2022$ وبالتالي:

$$y = 2022e^{2x} + 1$$

(2) المعادلة $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ (ب) حلا وحيداً

التبرير: نضع $t = e^x > 0$ ومنه المعادلة $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ تكافئ المعادلة $t^2 - 3t - 4 = 0 \dots (E)$.

للمعادلة (E) حلين في $\mathbb{R}$ هما: $t_1 = 4 > 0$ أو $t_2 = -1 < 0$ "مرفوض"

إذن حلول المعادلة $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ هي: $S = \{\ln 4\}$ وعليه فهي تقبل حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$.

(3) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$ تساوي: (ج) 0

التبرير: لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 - 1} \times \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 0 \end{aligned}$$

التمرين الثاني:

(I) بقراءة بيانية:

$$f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = \frac{4-0}{3-1} = 2$$

(2) تحديد إشارة كل من: $f(x)$ و $f'(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		0	+
$f'(x)$		0	+

(ب) وضعية (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = 1$.

x	0	α	$+\infty$
$f(x) - 1$		0	+
الوضعية النسبية		(C_f) فوق (Δ) يقطع في النقطة $(\alpha; f(\alpha))$ (C_f) تحت (Δ)	

(II) نقبل أن الدالة f معرفة بالعلاقة: $f(x) = (ax + b) \ln x$

حيث a و b عدنان حقيقيان.

(1) حساب $f'(x)$ بدلالة a و b .

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وبالتالي المشتقة:

$$f'(x) = a \ln x + \frac{ax+b}{x} = \frac{ax \ln x + ax + b}{x}$$

(2) باستعمال المعطيات السابقة نعين a و b .

لدينا: $f'(1) = 2$ ومنه $\frac{a(1) \ln(1) + a + b}{1} = 2$ أي $a + b = 2$ إذن $a = 2 - b$.

من جهة أخرى لدينا أيضاً $f(e^{-1}) = \frac{-2}{e}$ أي: $\frac{a(e^{-1}) \ln(e^{-1}) + a + b}{e^{-1}} = \frac{-2}{e}$ ومنه $ae^{-1} + b = \frac{2}{e}$ إذن $a + be = 2$ أي $a + be - 2 = 0$.

نعوض بقيمة a التي وجدناها سابقاً نجد: $2 - b + be - 2 = 0$ ومنه $b(e - 1) = 0$ إذن $b = 0$ و $a = 2$.

(3) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $g(x) = f(x) - \ln[f(x)]$

(أ) التعبير عن $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)[f(x) - 1]}{f(x)}$$

(ب) دراسة إشارة $g'(x)$ على المجال $]1; +\infty[$.

من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$: $f(x) > 0$ ومنه الإشارة من إشارة البسط: $f'(x)[f(x) - 1]$.

x	1	α	$+\infty$
$f(x) - 1$		0	+
$f'(x)$		+	+
$g'(x)$		0	+

ومنه الدالة g متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $]1; \alpha]$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g .

x	1	α	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$		$g(\alpha)$	

التمرين الثالث:

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+1)e^x - e$.

(1) دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

أ- تعيين نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^x - e = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x - e = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + e^x - e = -e$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

ب- الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

$g'(x) = 0$ يكافئ $x = -2$ مع $e^x > 0$.

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) أ) إثبات أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -ex + e - 2$: مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex + e - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x - ex + e - 2 + ex - e + 2]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex + e - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex + e - 2)] = 0$ وعليه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -ex + e - 2$: مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) - (-ex + e - 2) = xe^x = 0$ حيث $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
xe^x	-	0	+
الوضعية النسبية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(0; f(0))$	(C_f) فوق (Δ)

ج) نبين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (D) ، يطلب تعيين معادلة له.

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x) = -e$.

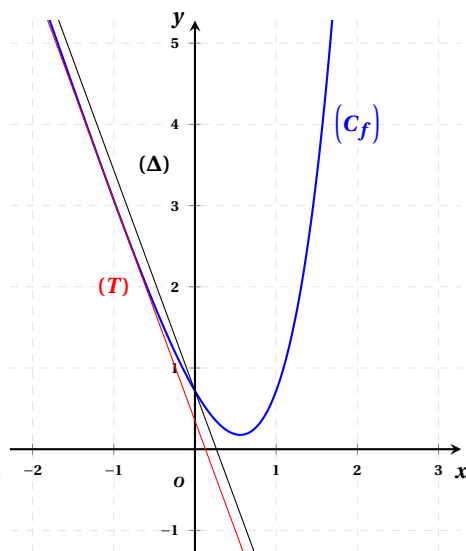
أي $g(x) = -e$ ومنه $(x+1)e^x - e = -e$ أي $x+1=0$ وعليه $x = -1$ وبالتالي يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (D) معادلته:

$$f(-1) = -e^{-1} + 2e - 2 \text{ مع } (T): y = -e(x+1) + f(-1)$$

$$\text{إذن : } (T): y = -e x - e^{-1} + 2e - 2$$

$$\text{وعليه : } (T): y = -e x + e - 2 - e^{-1}$$

(4) إنشاء كل من : (C_f) ، (D) و (T) . يعطى $f(\alpha) \approx 0.2$



x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+

الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-2; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -2]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-2	α	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	
$g(x)$	$-e$	$g(-2) \approx -2.85$	0	$+\infty$

(2) برهان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

في المجال $]-\infty; -2]$ الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما و $0 \notin]-e; g(-2)]$ ومنه المعادلة $g(x) = 0$ لا تقبل حلا في هذا المجال.

في المجال $[-2; +\infty[$ الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما و $0 \in]g(-2); +\infty[$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2; +\infty[$.

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقق أن : $0.5 < \alpha < 0.6$:

$$\text{لدينا } 0 < g(0.5) \times g(0.6) < 0$$

(3) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^x - ex + e - 2$. نسمي (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - ex + e - 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x - ex + e - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (x - ex) + e - 2 = +\infty$$

مع العلم أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$.

(2) حساب $f'(x)$: الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x) = e^x + xe^x - e = e^x(1+x) - e = g(x)$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ وعليه :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

(5) نناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$(m+2-e)e^{-x} = x$$

$(m+2-e)e^{-x} = x$ تكافئ $(m+2-e) = xe^x$ ومنه $m = xe^x + e - 2$ وعليه

$f(x) = -ex + m$. إذن هي مناقشة مائلة

الحلول هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -ex + m$ ومنه :

◀ $m \in]-\infty; e-2-e^{-1}]$ لا توجد حلول .

◀ $m = e-2-e^{-1}$ يوجد حل وحيد سالب .

◀ $m \in]e-2-e^{-1}; e-2[$ يوجد حلان سالبين .

◀ $m = e-2$ يوجد حل وحيد معدوم .

◀ $m > e-2$ يوجد حل وحيد موجب

(III) h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = e[(x+1)e^x - x]$

(1) تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = f(x+a) + b$$

لدينا : $h(x) = e[(x+1)e^x - x] = (x+1)e^{x+1} - ex$ ، و :

$$f(x+a) + b = (x+a)e^{x+a} - e(x+a) + e-2+b$$

$$= (x+a)e^{x+a} - ex - ea + e-2+b$$

بالمطابقة نجد : $x+a=1$ و $-ea+e-2+b=0$

ومنه : $a=1$ و $-e+e-2+b=0$ إذن : $b=2$ وبالتالي : $h(x) = f(x+1)+2$

(2) شرح كيفية رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم نرسمه في نفس المعلم السابق .

(C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه : $\vec{V} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

