

المستوى :

3 ثانوي

رياضي + ت ر

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ساعتين { 120 د }

23 أكتوبر 2021



المنصة العلمية للبالوريا - عقبة بن نافع -

الموسم الدراسي : 2021 / 2022

الفصل الأول

الرياضيات

الفرض الأول في مادة

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء استغلوا المدة الزمنية للمحاولة الكتابية في الموضوع بشكل منظم ،،

04 ن

التمرين الأول

❖ ملاحظة : الأجزاء الأربعة مستقلة عن بعضها البعض { أي : لا علاقة تربط هذه الأجزاء } ،،

الجزء الأول :

أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية f ، g و k عند العدد 1 مفسرا بيانها في كل مرة النتيجة المحصل عليها :

$$k(x) = 2x|x-1| \quad \text{“} \quad g(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{“} \quad f(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$$

الجزء الثاني :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = f(-x)$ و $h(x) = f(2x-1)$

• بدون تعيين الدالتين g و h ، عين الدالتين g' و h' ؟ .

الجزء الثالث :

◆ عين مشتقات الدوال الآتية :

$$1. f : x \mapsto (2x^2 - x + 3)^4 \text{ على } \mathbb{R} . \quad 2. g : x \mapsto \frac{1}{(x^2 - 1)^3} \text{ على }]1; +\infty[.$$

$$3. h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4} \text{ على }]2; +\infty[.$$

الجزء الرابع :

من أجل $x \geq 0$ و n عدد طبيعي نضع $f_n(x) = x^n \sqrt{x}$

◆ بين أن الدالة f_n تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ ثم عبر عن $f'_{n+1}(x)$ بدلالة n و $f_n(x)$.

الصفحة : 01 من 04

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلم متعامد للمستوي ، وحدة الرسم هي $1cm$.
 نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ نسمي $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني .

/1

- أ - عيّن نهاية الدالة u عند $-\infty$.
 ب - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا :
 $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$. استنتج نهاية الدالة u عند $+\infty$.

/2

- أ - بيّن أنّ $[u(x) + 2x]$ تؤوّل إلى 0 عندما x يؤوّل إلى $-\infty$.
 ب - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x) > 0$. استنتج إشارة $[u(x) + 2x]$.
 ج - فسّر هذه النتائج بيانيا .
 نقبل أنّ الدالة u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. أرسم $\mathcal{C}$ و مستقيمه المقارب المائل .

❖ ملاحظة: على الممتحن النظامي أن يختار أحد التمرينين 3 أو 4 حسب ما درسه في القسم ،

التمرين الثالث

10 ن



الصفحة : 04 من 04

..... حاول ،، قاوم ،، تحدى ،، لا تتردد انتهى .

أيها التلاميذ الشرفاء تذكروا أنَّ : تعب المراجعة أفضل من ألم السقوط ،،

المنصة العلمية للبكالوريا - عقبة بن نافع - 2022

المستوى :

3 ثانوي

رياضي + ت ر

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ساعتين { 120 د }

24 أكتوبر 2021



المنصة العلمية للبيكالوريا - عقبة بن نافع -

الموسم الدراسي : 2021 / 2022

الفصل الأول

الرياضيات

تصحيح الفرض الأول في مادة

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء تفحصوا الحل للتأكد من المحاولة ،، و للعلم أنه الحل مختصر ،،

04 ن

التمرين الأول

الجزء الأول :

طريقة : لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند a ندرس نهاية النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لما يؤول h إلى 0.

1) لدينا : $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{[(1+h)^2 - 2(1+h) + 3]^2 - 4}{h} = \frac{h^2(h^2 + 4)}{h}$$

ومنه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h(h^2 + 4) = 0$. إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 و لدينا $f'(1) = 0$.

المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه 0 و هو موازي لمحور الفواصل.

2) لدينا : $g(x) = \sqrt{x-1}$.

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

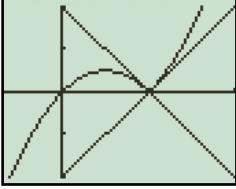
و منه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = +\infty$

إذن الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند 2 . بما أن نهاية النسبة $\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ هي $+\infty$ ، فإن معامل توجيه المستقيم (AM) حيث $A(1;0)$ و M نقطة من (C_g) فاصلتها $1+h$ يصبح كبيرا جدا لما يؤول h إلى 0 و هذا يعني أن (C_g) يقبل عند النقطة $A(1;0)$ مماسا موازيا لحامل محور الترتيب.



3) لدينا : $k(x) = 2x|x-1|$

طريقة: إذا كانت نهاية النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لما يؤول h إلى 0 غير منتهية فإن المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور الترتيب.



$$\text{من أجل } h > 0, \quad \frac{k(1+h)-k(1)}{h} = \frac{2(h+1)|h|}{h} = 2(h+1)$$

$$\text{و من أجل } h < 0, \quad \frac{k(1+h)-k(1)}{h} = \frac{2(h+1)|h|}{h} = -2(h+1)$$

← نلاحظ أن هذه النسبة تقبل نهاية من اليمين عند 0 مساوية لـ 2 و نهاية من اليسار عند 0 مساوية لـ -2.

◆ نقول أن k تقبل الاشتقاق عند 1 من اليمين و من اليسار و أن عددها المشتق من اليمين عند 1 هو 2 و عددها المشتق من اليسار عند 1 هو -2 و بما أنهما مختلفان فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1 (النسبة $\frac{k(1+h)-k(1)}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0). المنحني (C_k) يقبل عند النقطة $A(1;0)$ نصفي مماسين معاملا توجيههما 2 و -2.

الجزء الثاني :

❖ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ومنه فالدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$g'(x) = -f'(-x) = -\frac{1}{(-x)^2 + (-x) + 1} = -\frac{1}{x^2 - x + 1}$$

❖ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $(2x-1)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ومنه فالدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$h'(x) = 2f'(2x-1) = 2 \times \frac{1}{(2x-1)^2 + (2x-1) + 1} = -\frac{2}{4x^2 - 2x + 1}$$

1. نلاحظ أن $f = u^4$ مع $u(x) = 2x^2 - x + 3$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $u'(x) = 4x - 1$

إن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f' = 4u'u^3$ و $f' = 4(4x - 1)(2x^2 - x + 3)^3$

2. نلاحظ أن $g = \frac{1}{u^3}$ مع $u(x) = x^2 - 1$ كما أن $u(x) \neq 0$ من أجل $x \in]1; +\infty[$. الدالة u قابلة

للاشتقاق على $]1; +\infty[$ ولدينا $u'(x) = 2x$. إذن g قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ ولدينا $g' = -\frac{3u'}{u^4}$ و $g' = -\frac{3(2x)}{(x^2 - 1)^4}$

$$g'(x) = -\frac{3(2x)}{(x^2 - 1)^4} = -\frac{6x}{(x^2 - 1)^4}, \quad \square$$

3. نلاحظ أن $h = \sqrt{u}$ مع $u(x) = x^2 - 4$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]2; +\infty[$ مع $u(x) > 0$. إذن h

قابلة للاشتقاق على $]2; +\infty[$ ولدينا $h' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ و $h' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ و $h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

الدالة $x \mapsto x^n$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ بينما الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$

و منه فالدالة f_n جداولهما تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$.

$$\text{لدينا: } f_{n+1}(x) = x^{n+1} \sqrt{x} \text{ و منه } f'_{n+1}(x) = (n+1)x^n \sqrt{x} + x^{n+1} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{و بالتالي } f'_{n+1}(x) = (n+1)x^n \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^n \sqrt{x} = \left(n + \frac{3}{2}\right)x^n \sqrt{x}$$

$$\text{و نجد هكذا: } f'_{n+1}(x) = \left(n + \frac{3}{2}\right)f_n(x)$$

1.

أ. - حساب نهاية الدالة u عند $-\infty$: نلاحظ أن هناك نهاية لدالة مركبة.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$

ب. - تبين المساواة :

$$u(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1}+x = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$. { استعمال المرافق لإزالة حلة عدم التعيين } .

ل. إذن يكون حامل محاور الفواصل مقاربا أفقيا للمنحني $\mathcal{C}$.

2. أ. - من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x)+2x = \sqrt{x^2+1}+x$ ومنه $u(x)+2x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

حسب أ. - لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1}-x = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [u(x)+2x] = 0$

ب. - من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x) = \sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ وبالتالي إذا كان $x \leq 0$ فإن $u(x) > 0$ ، وإذا كان $x \geq 0$ فإن $u(x) > 0$.

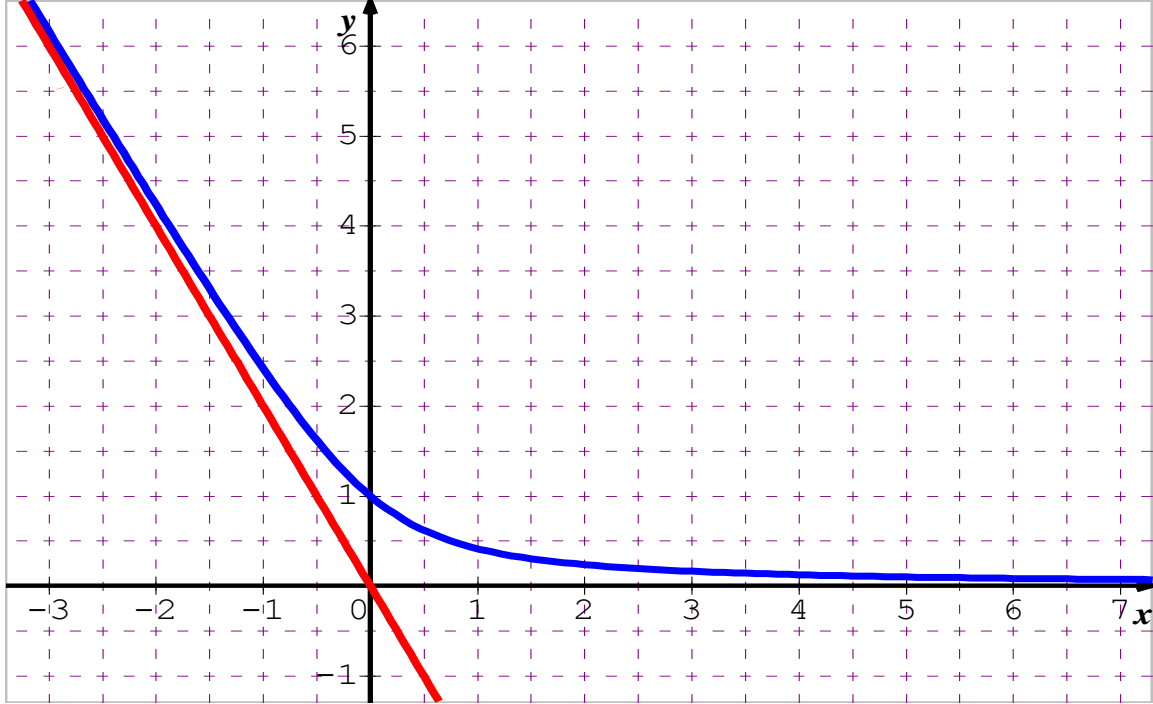
إذن من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x) > 0$

ج. - المستقيم D ذي المعادلة $y = -2x$ هو مقارب مائل للمنحني $\mathcal{C}$ ، و $\mathcal{C}$ يقع فوق المستقيم D .

• $u(x) + 2x > 0$ معناه $u(x) > -2x$ وبالتالي يقع $\mathcal{C}$ فوق D .

* رسم المنحنى $\mathcal{C}$ و المستقيم المقارب :

• لاحظ أن $u(0)=1$.



أَيَا بَاجِئًا عَنِ الْإِمْتِحَانِ قِفْ هُنَا 2022

حديقة العلم النبيل

BAC 2022 عقبة بن نافع BAC 2022

الشعب { علوم تجريبية + رياضيات + تقني رياضي }

تعب المراجعة أفضل من ألم السقوط

و ... تذكروا أن : الخوف عدو الإنجاز

صناعة الطريق الذهبي نحو بكالوريا 2022

<https://www.facebook.com/okba.bac.2010>

الجزء الأول:

(1) حساب النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \sqrt{1+x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \times x + \sqrt{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = 0 \begin{cases} -1 \\ +\infty \end{cases}$$

إذن المنحني (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب بجوار $+\infty$.(ب) بيان أن المستقيم (d) مقارب مائل بجوار $-\infty$: أي نحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - \sqrt{1+x^2}$ ، أي:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = (-x - \sqrt{1+x^2}) \times \frac{-x + \sqrt{1+x^2}}{-x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{-x + \sqrt{1+x^2}} = 0 \begin{cases} -1 \\ +\infty \end{cases}$$

إذن المستقيم (d) مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.(2) بيان أن: $\sqrt{1+x^2} - x > 0$ من أجل عدد حقيقي x ، نميز حالتين:

$$\diamond \text{ حالة } x \geq 0 \text{ يكون: } \sqrt{1+x^2} - x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} > 0.$$

$$\diamond \text{ حالة } x < 0 \text{ يكون: } \sqrt{1+x^2} - x > 0. \text{ ومنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ يكون: } \sqrt{1+x^2} - x > 0.$$

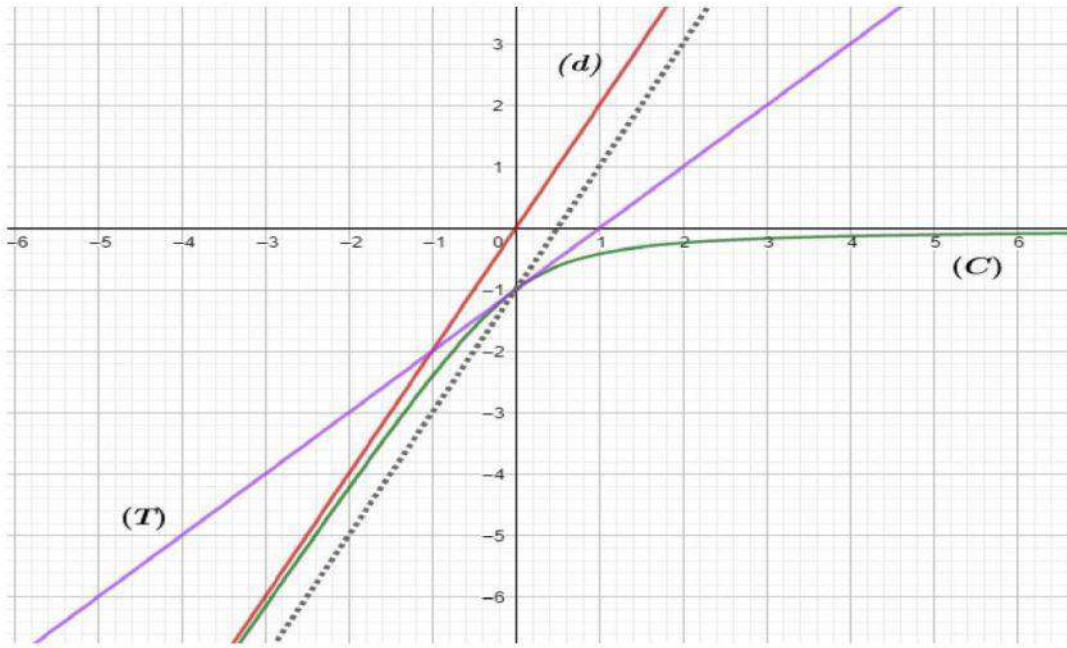
$$\text{(ب) حساب } f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}} > 0.$$

ومنه: الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	0

جدول التغيرات: $\diamond$ (ج) معادلة المماس: $(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ ، ومنه: $(T): y = x - 1$.

(3) الإنشاء :



(ب) حل المتراجحة: $f(x) > 2x - 1$ (الحلول هي المجالات التي يكون فيها المنحني (C) فوق المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 1$ إذن: $S =]-\infty; 0[$.

(ج) من أجل كل $x > 0$ يكون: $x(1 + f(\frac{1}{x})) = x(1 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}) = x + 1 - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = x + 1 - x\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}}$
 أي: $(\sqrt{x^2} = x \dots; x > 0)$ ، $x(1 + f(\frac{1}{x})) = x + 1 - \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{x} = x - \sqrt{x^2 + 1} + 1 = f(x) + 1$.

الجزء الثاني :

(1) بيان أن: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\tan x - \sqrt{1 + \tan^2 x}] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(\tan x)$: أي،

، $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$: أي، $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = 0$: ومنه: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$

(2) حساب $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g(x)$:

أي: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(\tan x)$: أي، $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g(x) = -\infty$ ، إذن: المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي للمنحني (C) .

(3) لدينا : $g(x) = \tan x - \sqrt{1 + \tan^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$

. $g(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$ ، ومنه : $g(x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}$

(توضيح : بما أن $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\cos x > 0$ ، أي $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$.

(ب) دراسة تغيرات الدالة g :

(❖) حساب $g'(x)$:

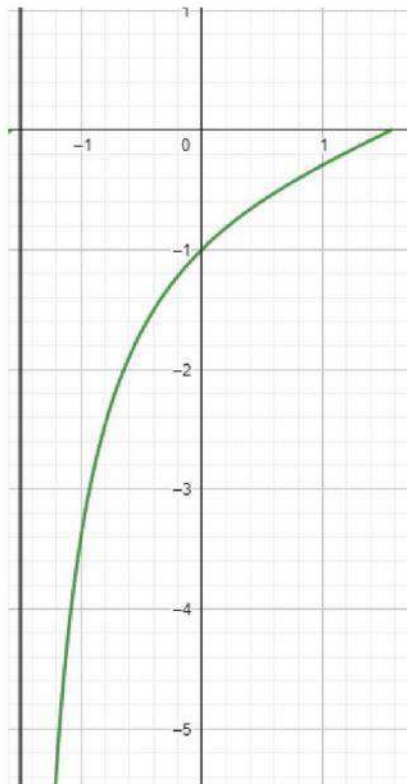
. $g'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - (-\sin x)(\sin x - 1)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

نعلم أن : $1 - \sin x > 0$ من أجل كل $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ، إذن : الدالة g متزايدة تماما على $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty \rightarrow 0$

(❖) جدول التغيرات :

(❖) الإنشاء :



الجزء الثالث :

(1) أولاً نلاحظ أن D_h متناظرة بالنسبة إلى 1 ، ثانياً نحسب : $h(2-x)$ في الحالتين ، أي :

❖ حالة $2-x \leq 0$:

$$h(2-x) = 2-x - \sqrt{1+(2-x)^2} = 2-x - \sqrt{1+4+x^2-2x} = 2-x - \sqrt{x^2-2x+5} = h(x)$$

❖ حالة $2-x \geq 2$:

$$h(2-x) = 2-(2-x) - \sqrt{(2-x)^2 - 4(2-x) + 5} = x - \sqrt{x^2 + 1} = h(x)$$

إذن : من أجل كل x من $]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$ يكون : $h(2-x) = h(x)$

ومنه : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_h) .

(2) تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

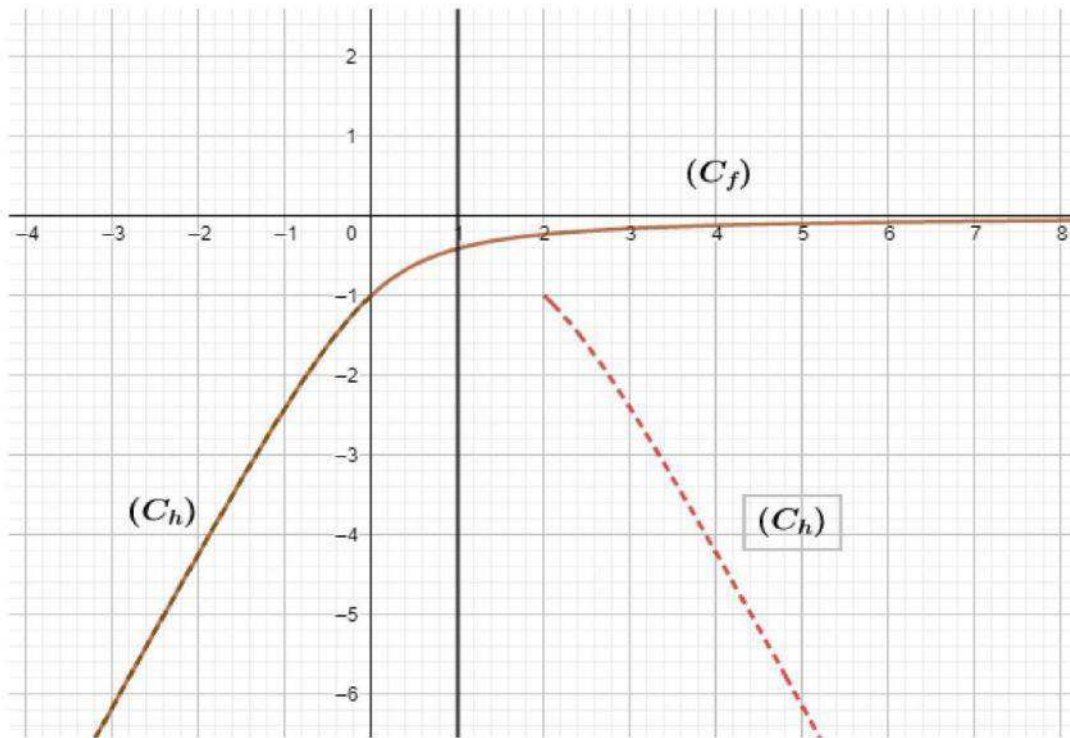
❖ لدينا على المجال $]-\infty; 0]$: $h(x) = f(x)$.

❖ على المجال $[2; +\infty[$ نكمل جدول التغيرات بالحفاظ على قيم $f(x)$ ونغير اتجاه الدالة f ، لأن المنحنى (C_h) يناظر المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x = 1$.

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	-1	$-\infty$

❖ جدول التغيرات على المجال $[2; +\infty[$

(3) إنشاء (C_h) :



(I) تعيين α و β حتى يقبل (C_f) قيمة حدية عند 0 و $f(0) = -1$:
لدينا: $f(0) = -1$ ، ومنه:

$$\frac{(0)^2 + \alpha(0) + \beta}{2(0) - 2} = -1 \Rightarrow \frac{\beta}{-2} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

ولدينا: $f(0) = -1$ تقبل قيمة حدية لـ f معناها: $f'(0) = 0$
نعين أولاً $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x + \alpha)(2x - 2) - 2(x^2 + \alpha x + \beta)}{(2x - 2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x + 2\alpha x - 2\alpha - 2x^2 - 2\alpha x - 2\beta}{(2x - 2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 2\alpha - 2\beta}{(2x - 2)^2}$$

ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

$$\frac{2(0)^2 - 4(0) - 2\alpha - 2\beta}{(2(0) - 2)^2} = 0 \Rightarrow -2\alpha - 2\beta = 0$$

$$\Rightarrow -2\alpha = 2\beta$$

$$\Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \text{ ومنه:}$$

(II) نضع فيما يلي: $\alpha = 1$ و $\beta = -2$:

① حساب: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right)$$

$$= \frac{1}{0^+}$$

$$= +\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right)$$

$$= \frac{1}{0^-}$$

$$= -\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$

② حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} \right) \\
&= +\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

3

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax + b + \frac{c}{2x - 2} \\
&= \frac{(ax + b)(2x - 2) + c}{2x - 2} \\
&= \frac{2ax^2 - 2ax + 2bx - 2b + c}{2x - 2} \\
&= \frac{2ax^2 + (2b - 2a)x - 2b + c}{2x - 2}
\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 2a = -2 \\ -2b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2}$$

إذن:

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{2x-2} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته : $y_{(\Delta)} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{2x-2}$$

لدينا : $2x - 2 = 0$ معناه : $x = 1$ ومنه :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	-		+

ومنه :

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; 1[$.
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]1; +\infty[$.

4

أ/ تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا : $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(2x-2)(2x-2) - 2(x^2 - 2x + 2)}{(2x-2)^2} \\
 &= \frac{4x^2 - 4x - 4x + 4 - 2x^2 + 4x - 4}{(2x-2)^2} \\
 &= \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2} \\
 &= \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}
 \end{aligned}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(2x-2)^2 > 0$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x(x-2)$:
لدينا:

$$\begin{aligned}
 2x(x-2) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	1	$+\infty$	

5

أ/ إيجاد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$:

نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم (Δ) :

$$y = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

ومنه: $\omega(1; 0)$

ب/ تبين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$

$x < 1$ أو $x > 1$	معناه:	$x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$	معناه:
$(2(1-x) > 1$ أو $(2(1-x) < 1$	معناه:	$(-x) > -1$ أو $(-x) < -1$	معناه:
$(2(1-x) \in D_f$	معناه:	$(2(1-x) \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$	معناه:

• ولدينا:

$$f(2(1-x)) + f(x) = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x) + 2}{2(2-x) - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$

مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز

تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2}{4 - 2x - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\ &= 0 \frac{x^2 - 2x + 2}{-(2x - 2)} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\ &= 0 \\ &= 2(0) \end{aligned}$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

إذا وُجد مماس لـ (C_f) يشمل $\omega(1; 0)$ معناه يوجد $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ يحقق:

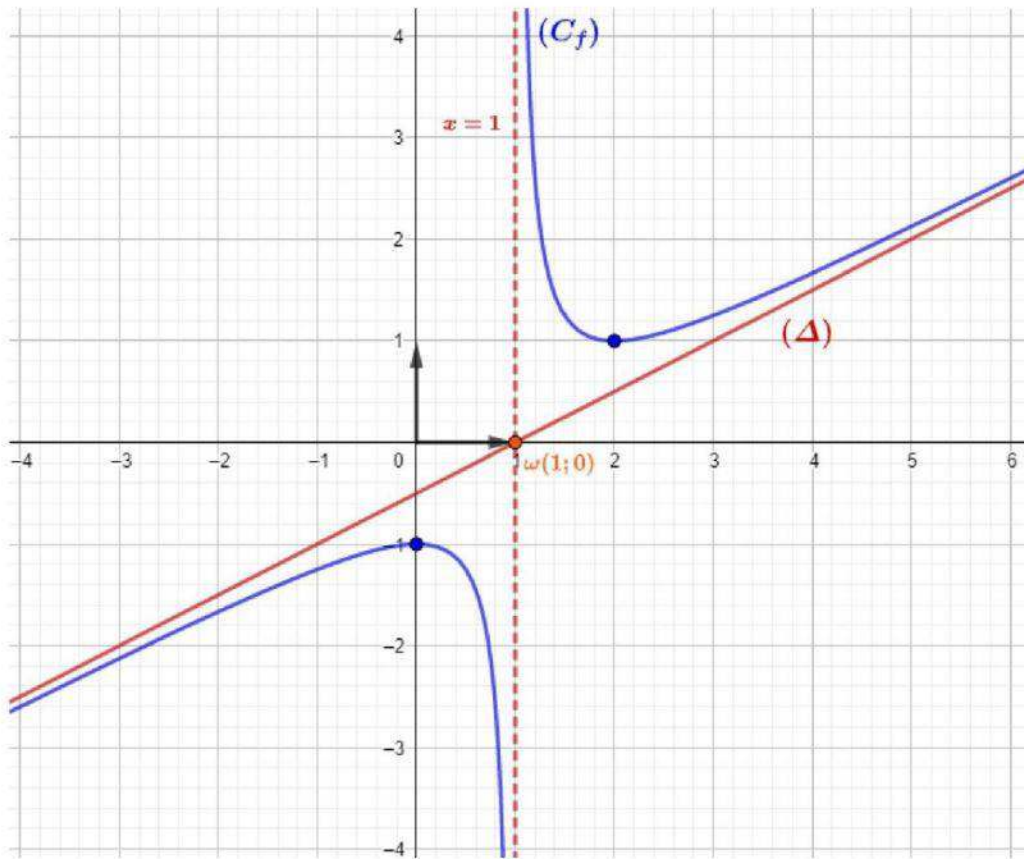
$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega &\Rightarrow f'(a)(1 - a) + f(a) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2} - \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2}a + \frac{a^2 - 2a + 2}{2a-2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{2a(a-2) - 2a^2(a-2) + (a^2 - 2a + 2)(2a-2)}{(2a-2)^2} = 0 \\ &\Rightarrow 2a^2 - 4a - 2a^3 + 4a^2 + 2a^3 - 2a^2 - 4a^2 + 4a + 4a - 4 = 0 \\ &\Rightarrow 4a - 4 = 0 \\ &\Rightarrow a - 1 = 0 \\ &\Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

لدينا: $a \notin \mathbb{R} - \{1\}$ إذن: لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

6 رسم كل من (Δ) و (C_f) :



..... نتمنى أن تكونوا قد استفدتم بذلك القدر الذي نريده منكم انتهى .

أيها التلاميذ الشرفاء تذكروا أنَّ : تعب المراجعة أفضل من ألم السقوط ،،

المنصة العلمية للبكالوريا - عقبة بن نافع - 2022