

التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_1 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n - 2 < 0$.

2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1$.

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و بين انها متقاربة.

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = 2u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

- عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ ثم احسب حدها الأول v_1 .

نضع في كل مما يلي : $\alpha = -4$.

أ- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

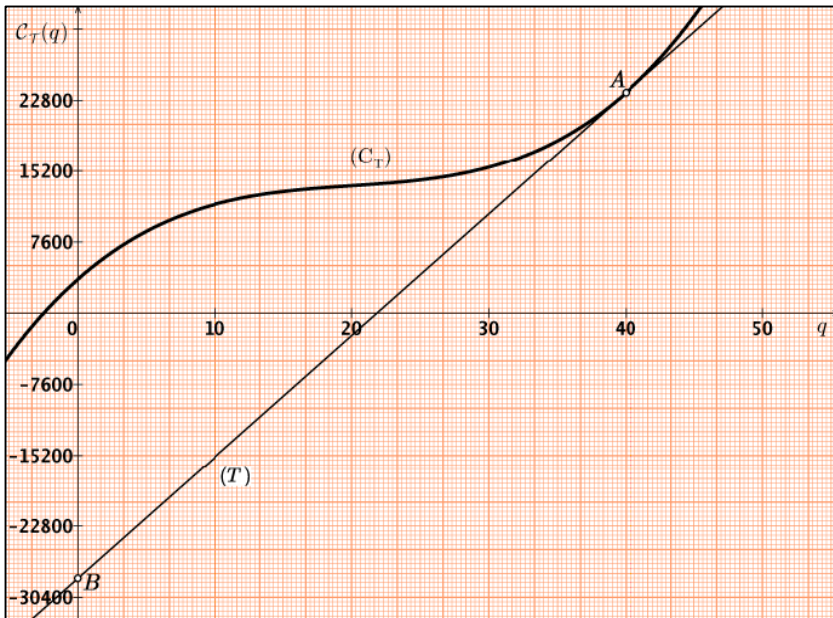
ب- احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

التمرين الثاني

نعتبر التمثيل البياني (C_T) المقابل هو لدالة الكلفة الإجمالية C_T وهي لمصنع ينتج مواد أولية للبناء ، الوحدات المنتجة q مقدرة

بآلاف الأطنان حيث $q \in [0, 50]$ و الكلفة مقدرة بمئات الدنانير ، (T) مماس للمنحنى (C_T) في النقطة $A(40, 23600)$

ويقطع حامل محور الترتيب في النقطة $B(0, -28400)$.



1. بقراءة بيانية :

أ- ماهي كلفة إنتاج 40 ألف طن من المنتج.

ب- احسب $C_T'(40)$.

ج- اكتب معادلة المماس (T) .

2. اذا علمت أن :

$$C_T(q) = q^3 - 60q^2 + 1300q + 3600$$

عين دالة الكلفة الهامشية C_m .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بـ : $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

3. استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

3. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1, +\infty[$ بـ : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5. ارسم (Δ) و (C_f) .

التمرين الثاني:

① كلفة إنتاج 40 آفة في 23600 دينار

② حساب $C_T(40)$

$$C_T(40) = \frac{-28400 - 23600}{0 - 40} = 1300$$

③ كتابة معادلة متساوية هذ نسبة

$$y = C_T(40)(q - 40) + C_T(40)$$

$$y = 1300(q - 40) + 23600$$

$$= 1300q - 28400$$

④ دالة الكلفة الهامشية C_m

$$C_m(q) = C_T'(q) = 3q^2 - 120q + 1300$$

التمرين الثالث:

① اتمامة خسر الدالة g

② $\Delta = 0$ نحسب $g'(x) = 3x^2 + 6x + 3$

$g'(x) = 0$ معناه $x = -1$

الدالة g متزايدة كاما

③ كما أن g مستقرة و متزايدة كاما على $[0, \frac{1}{2}]$

$g(0) \times g(\frac{1}{2}) < 0$

$-1 = 1, 3H$

فانه حسب مبرهنة القيمة المتوسطة المتوسطة المتعادلة

$g(n) = 0$ نصل حل وحيد α

③ اشارة $g(x)$

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	+	+

$$V_{n+1} = 2n + 2 + \alpha = \frac{V_n - \alpha}{2} + \alpha + 2$$

$$= \frac{1}{2}V_n + \frac{\alpha + 4}{2}$$

حتى تكون (V_n) متساوية هذ نسبة

$\alpha + 4 = 0$ أي $\alpha = -4$

حساب حد ها الاول V_1

$$V_1 = 2M_1 - 4 = 2(-2) - 4 = -8$$

كتابة V_n بدلالة n

$$V_n = V_1 + q^{n-1} = -8 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

كتابة u_n بدلالة n

$$u_n = \frac{V_n + 4}{2} = \frac{-8 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4}{2}$$

$$= -4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$$

حساب نهاية u_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 = 2$$

حساب مجموع S_n

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= \frac{V_1 + 4}{2} + \frac{V_2 + 4}{2} + \dots + \frac{V_n + 4}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(V_1 + V_2 + \dots + V_n + 4 + \dots + 4)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{V_1}{1 - \frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2}^n) + 4n \right]$$

$$= -8 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 2n$$

تصحيح اختبار الفصل الأول

التمرين الأول:

④ البرهان بالتراجع:

نفرض $P(n): 2n - 2 < 0$

من أجل $n = 1$: $2 \times 1 - 2 = 0$ أي $0 < 0$

وهذه $P(1)$ صحيحة

نفي $P(n)$ صحيحة $P(n)$ ونبرهن $P(n+1)$

$$P(n+1): 2(n+1) - 2 < 0$$

لدينا:

$$2(n+1) - 2 < 0 \text{ أي } \frac{1}{2} 2n - 1 < 0 \text{ أي } \frac{1}{2} 2n - 1 < 2 < 0$$

أي $2n - 2 < 0$ وهذه $P(n+1)$ صحيحة

لأن هذا أحد كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$2n - 2 < 0$$

② = التحقق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{2} u_n + 1$$

الاستنتاج =

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2} u_n + 1 = -\frac{1}{2} (u_n - 2)$$

وهذه: $u_{n+1} - u_n > 0$ اذ $u_n > 2$

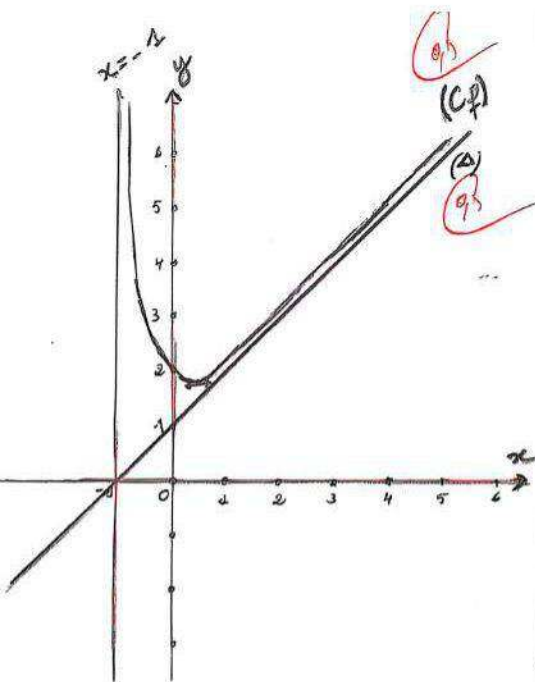
المتتالية (u_n) متزايدة كاما

التقارب: كما أن (u_n) متزايدة كاما و محدودة

من الأمل بالحد 2 فهي متقاربة

③ تعين قيمة α

$$V_{n+1} = 2u_{n+1} + \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} u_n + 1 \right) + \alpha$$



$$f'(x) = \frac{(x+1)(3x^2+6x+3)(x+1) - 2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

① استنتاج اتجاه تغير f

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	•	+
$(x+1)^3$	+	+	+
$f'(x)$	-	•	+

الدالة f متزايدة تمامًا على $[\alpha, +\infty[$ و
متناقصه تمامًا على $] -1, \alpha]$.
- جدول التغيرات :

x	-1	α	$+\infty$
$f(x)$		-	+

$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		$f(\alpha)$	

$$f(\alpha) \approx 1,89$$

② حساب النهايات :
 $\lim_{x \rightarrow -1} x+1 + \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$

التقسيم الهندسي : (f) تقبل مستقيمًا مائلًا ،
عكسي معادلته $x = -1$.

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 + \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$

④ بيان أن المستقيم (Δ) مائل ، (f) نحو $+\infty$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 + \frac{1}{(x+1)^2} - (x+1)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$

وهذه (Δ) مستقيم مائل ، (f) نحو $+\infty$:

⑤ الوضع النسبي :
 $f(x) - y = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

x	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	+

الوضع النسبي : (f) فوق (Δ) .

④ بيان أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

$f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$

لدينا : $f'(x) = \frac{(3x^2+6x+3)(x+1) - 2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$