



المدة : 3 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين :

**الموضوع الأول**

**التمرين الأول : ( 05 نقاط )**

① لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بحدها الاول  $u_0 = 8$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 4}$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > 0$ .

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ . ثم استنتج تقاربها .

② لتكن  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي  $n$  ب :  $v_n = 1 + \frac{a}{u_n}$

(أ) عين قيمة العدد الحقيقي  $a$  حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{4}{3}$  ، يطلب تعيين حدها الاول.

(ب) نضع  $a = 1$  أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم بين أنه أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}$

(ج) أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $s_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$  و المجموع  $s'_n : s'_n = v_0 + 3v_1 + \dots + 3^n v_n$  .

**التمرين الثاني : ( 04 نقاط )**

يحتوي كيس على ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ  $-1$  ،  $1$  و  $2$  وخمسة كرات سوداء مرقمة بـ  $-1$  ،  $0$  ،  $1$  ،  $2$  و  $2$  و كرتان خضراء مرقمتان بـ  $-1$  ،  $0$  . نسحب عشوائيا ثلاث كرات في ان واحد من الكيس .

① أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " الكرات المسحوبة مختلفة الالوان "

B " الكرات المسحوبة لها نفس الرقم "

C " مجموع ارقام الكرات المسحوبة معدوم "

② علما أن الكرات المسحوبة مختلفة الالوان ما احتمال أن تكون لها نفس الرقم ؟

③ هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ برر جوابك

④ ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بأكبر رقم تحمله الكرات المسحوبة .

(أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

(ج) أحسب احتمال الحادثة :  $X^2 + 2X \leq 0$

**التمرين الثالث: ﴿ 04 نقاط ﴾**

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول  $Z$  :  $(\bar{z} - 2 - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0$  .
- (II) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .
- نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $I$  والتي لواحقتها على الترتيب  $Z_A = 1+i$  ,  $Z_B = \bar{Z}_A$  ,  $Z_C = 2Z_B$  ,  $Z_I = 3$  .
- 1 أكتب على الشكل المثلثي العدد  $Z_A$  ثم استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين  $Z_B$  ,  $Z_C$  .
  - 2 أحسب  $|z_C - z_I|$  ,  $|z_B - z_I|$  ,  $|z_A - z_I|$  ماذا تستنتج ؟
  - 3 عن قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$  عددا حقيقيا .
  - 3 أكتب العدد  $\frac{Z_C - 3}{Z_A - 3}$  على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث  $IAC$  .
  - 4 عين مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  في كل حالة :
- (أ)  $|iz - 2 - 2i| = |z - 1 - i|$  (ب)  $Z = 3 + ke^{\frac{\pi}{3}i}$  مع  $k$  يسمح  $\mathbb{R}_+^*$

**التمرين الرابع: ﴿ 07 نقاط ﴾**

- (I) لتكن الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = x^2(1 - 2\ln x)$
- 1 (أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  .
  - (ب) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $]0; +\infty[$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .
  - 2 بين أن المعادلة  $g(x) = -1$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1.89 \leq \alpha \leq 1.90$  . ثم استنتج إشارة  $g(x) + 1$  .
- (II)  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$  .
- وليكن  $\mathcal{C}_f$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  حيث  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$  .
- 1 أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ، ثم فسر النتائج هندسيا .
  - 2 (أ) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(1+x^2)^2}$  .
  - (ب) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .
  - 3 بين أن :  $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$  ثم أعط حصرا لـ  $f(\alpha)$  .
  - 4 بين أن المنحنى  $\mathcal{C}_f$  يقبل مماسا  $T$  عند نقطة ذات الترتيبة  $0$  ، ثم أكتب معادلة المماس  $T$  .
  - 5 أحسب  $f$  أنشئ كلا من  $T$  والمنحنى  $\mathcal{C}_f$  .
  - 6 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $f(x) = \frac{1}{2}x + m$  .
  - 7 لتكن  $h$  دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  ب :  $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{1+(x+1)^2} + 2$  ،  $\mathcal{C}_h$  تمثيلها البياني .
- بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول المنحنى  $\mathcal{C}_f$  إلى المنحنى  $\mathcal{C}_h$  ثم ارسمه في نفس المعلم السابق .

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

## التمرين الأول : (04 نقاط)

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{-5}{2u_n - 7}$

① (أ) أثبت من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq u_n \leq 2$

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

② (أ) أثبت انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - 1 \leq \frac{4}{5}(u_n - 1)$

(ب) تحقق من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$  ، ثم استنتج نهاية المتتالية ( $u_n$ ) .

③ نعتبر المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  كما يلي :  $v_n = \frac{2u_n - 2}{2u_n - 5}$

(أ) بين أن المتتالية ( $v_n$ ) هندسية يطلب تعيين أساسها و حددها الأول  $v_0$  .

(ب) أكتب عبارة  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$  .

④ أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = \frac{1}{2u_0 - 5} + \frac{1}{2u_1 - 5} + \dots + \frac{1}{2u_n - 5}$

## التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 ، وأربع كرات سوداء مرقمة من 4 إلى 7 و ثلاث كرات مرقمة من 8 الى 10 لانفرق بينها عند اللمس. نسحب ثلاث كرات على التوالي دون إعادة الكرة المسحوبة إلى الصندوق.

نعتبر الحوادث التالية:  $A$  "الكرات المسحوبة من الوان مختلفة"

$B$  "الحصول على كرتين بيضاء على الاقل"

$C$  "الكرات المسحوبة تحمل ارقاما فردية"

$D$  "الكرات المسحوبة تحمل ارقاما تشكل حدودا متتابة لمتتالية هندسية متزايدة تماما"

① بين أن  $p(A) = \frac{19}{20}$  ثم أحسب  $p(B)$  ،  $p(C)$  و  $p(D)$  .

② بين أن :  $p(C \cap D) = \frac{1}{720}$  ، ثم استنتج  $p(C \cup D)$

③ علما أن الكرات المسحوبة تحمل أرقاما تشكل حدودا متتابة لمتتالية هندسية متزايدة تماما ما احتمال أن تكون أرقامها فردية ؟

④ نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

(أ) - عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  .

(ب) - أحسب الأمل الرياضي  $E(X)$  ، ثم استنتج  $E(1444X - 2023)$  .



## التمرين الثالث: (04 نقاط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد فقط صحيح. عين الجواب الصحيح معطلا اختيارك :

① حل المعادلة (E) ذات المجهول  $Z$  حيث  $z = \frac{6-z}{3-z}$  (E) هو :

☐ أ  $1-i$

☐ ب  $2+\sqrt{2}i$

☐ ج  $-2-\sqrt{2}i$

② العدد المركب  $L$  حيث  $L = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2022}$  هو عدد :

☐ أ حقيقي موجب

☐ ب حقيقي سالب

☐ ج تخيلي صرف موجب

③ لتكن (Γ) مجموعة النقط  $M(x,y)$  من المستوى حيث :  $|iz-1-i|=3$  المجموعة (Γ) هي :

☐ أ دائرة نصف قطرها 3

☐ ب دائرة نصف قطرها  $\sqrt{3}$

☐ ج دائرة نصف قطرها 3

ولاحقة مركزها  $1-i$

ولاحقة مركزها  $1+i$

ولاحقة مركزها  $-1+i$

④ الجذران التربيعيان للعدد المركب  $w$  حيث  $w = -2-2i\sqrt{3}$  هما :

☐ أ  $1+\sqrt{3}i$  و  $1-\sqrt{3}i$

☐ ب  $-1+\sqrt{3}i$  و  $-1-\sqrt{3}i$

☐ ج  $1-\sqrt{3}i$  و  $-1+\sqrt{3}i$

## التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي  $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$  وليكن  $\mathcal{C}_f$  تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $O, \vec{i}, \vec{j}$  .  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$

① أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  وبين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

② بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1.8 < \alpha < 1.9$  .

③ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة  $y = x$  مستقيم مقارب لـ  $\mathcal{C}_f$  عند  $+\infty$  ، ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحنى

$\mathcal{C}_f$  والمستقيم (Δ) .

④ عين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

⑤ بين أن المنحنى  $\mathcal{C}_f$  يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

⑥ أحسب  $f(0)$  و  $f(3)$  ، ثم أنشئ كل من (Δ) ، (T) ،  $\mathcal{C}_f$  .

⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $f(x) = x + m$  .

⑧ أ) بين أن الدالة  $G$  المعرفة بـ :  $G(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x+1}$  دالة أصلية للدالة  $g(x) = (x^2 + 1)e^{-x+1}$  على  $\mathbb{R}$

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $\mathcal{C}_f$  والمستقيم (Δ) والمستقيمين  $x=0$  و  $x=1$  .

انتهى الموضوع الثاني

مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا دورة جوان 2023