



التمرين الأول: (10 نقاط)

I. نعتبر المتتالية العددية (t_n) المعرفة بحدّها الأول $t_0 = \sqrt{\frac{\pi}{4}} + 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $t_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}t_n^2 + 2}$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = t_n^2 - 4$.

(1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

(2) اكتب بدلالة n عبارة v_n ، ثم استنتج عبارة t_n بدلالة n .

(3) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_n^2$.

II. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$.

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) استنتج أن (u_n) متقاربة،.

(4) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

(5) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \cos(v_n)$.

ب. استنتج القيمة المضبوطة للعدد الحقيقي $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

التمرين الثاني: (10 نقاط)

I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $u_n = \int_{-1}^1 \left(\frac{2|x|}{3} + \frac{e^{-2n|x|}}{3} \right) dx$.

(1) بين من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n > 0$.

(2) بين من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n = 2 \int_0^1 \left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2nx}}{3} \right) dx$.

(3) برهن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \int_0^1 e^{-2(n+1)x} (1 - e^{2x}) dx$.

(4) استنتج إشارة $u_{n+1} - u_n$ ثم اتجاه تغير المتتالية

• هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل اجابتك

(5) اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم عين نهاية المتتالية (u_n) .

II. نعتبر المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $v_n = 2n u_n$

(1) اكتب عبارة v_n بدلالة n .

(2) المتتالية العددية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $w_n = v_n - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$

أ) عين عبارة w_n بدلالة n . ثم بين أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها

ب) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$

ج) من أجل كل عدد طبيعي n , نضع $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$ و $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

• احسب S_n بدلالة n , ثم استنتج S'_n بدلالة n

بالتوفيق للجميع