



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

الوظيفة المنزلية

①

(حول الدوال العددية)

نُشر الحل يوم: 2020/12/10

سُلمت يوم: 2020/12/03

إعداد الأستاذ:

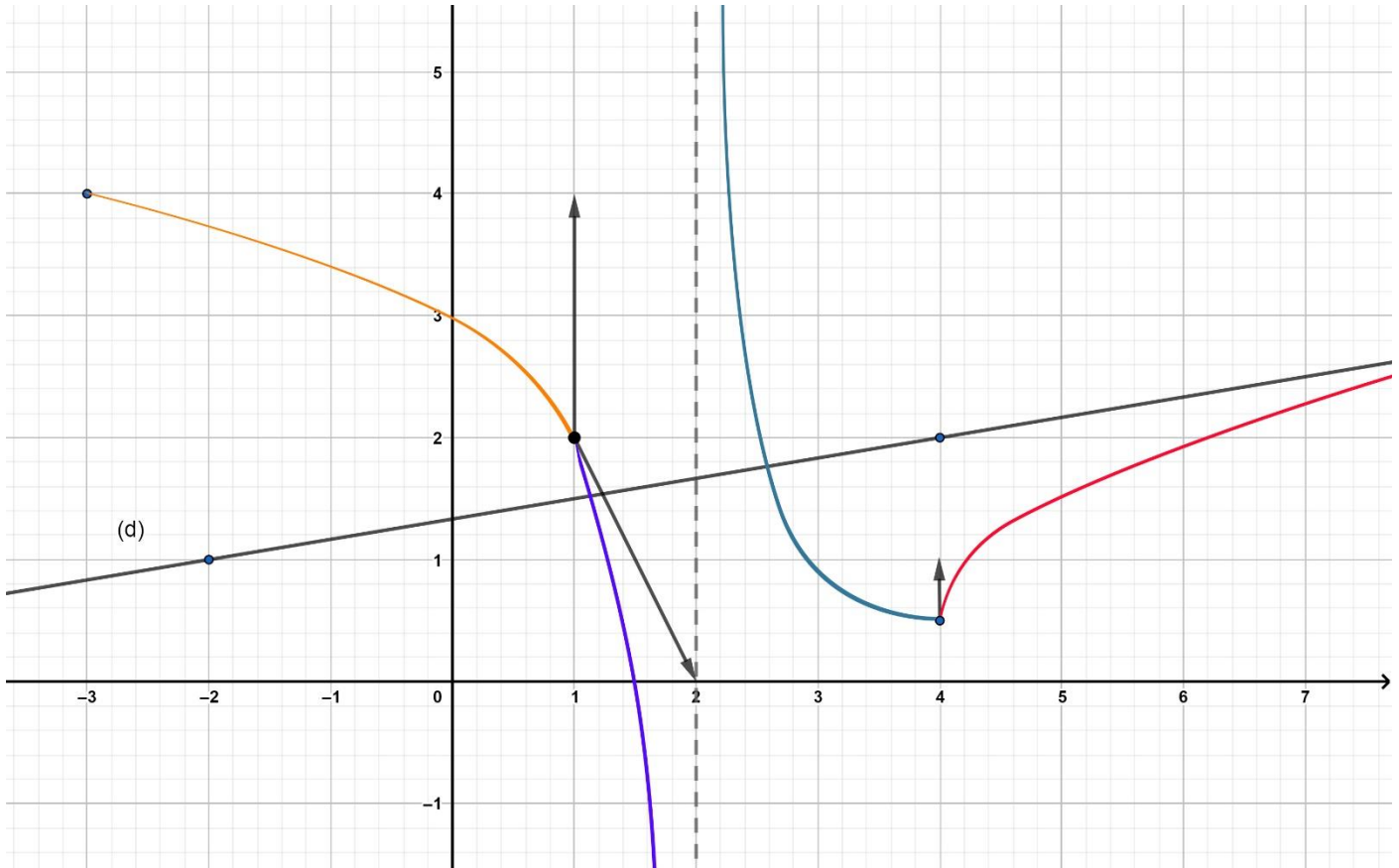
قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 09

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجموعة D حيث: $D = [-3; 2[\cup]2; +\infty[$

(Δ) المستقيم المقارب المائل لـ (C_f)



بقراءة بيانية أجب بصحيح أو خطأ مع تصحيح الخطأ

- (1) f غير مستمرة على D
- (2) f غير مستمرة عند 1
- (3) f تقبل الاشتقاق عند 1
- (4) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلان على D
- (5) f تقبل الاشتقاق على يمين 4
- (6) f تقبل الاشتقاق على يسار 1

(7) الدالة f متناقصة على $[-3; 2[\cup]2; 4]$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = +\infty \quad (8)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = +\infty \quad (9)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2 \quad (10)$$

$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{3}{4} \quad (11) \text{ معادلة المستقيم } (\Delta)$$

التمرين الثاني

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

(1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.

ب- أعط حصرا سعته 0.1 للعدد α .

ج- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) عيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها واعط تفسيراً هندسياً للنتائج.

(2) أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ ، مع تحديد الأعداد الحقيقية a, b, c

(3) أ- بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له.

ب- ادرس الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f) .

(4) أ- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب- بين أن (C_f) يقطع مرة واحدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β حيث $-1 \leq \beta \leq 0$.

ج- بين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(5) أحسب $f(0)$ ثم ارسم المستقيمين المقاربين و (C_f) .

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بـ: $h(x) = f(|x|)$

أ- بين أن الدالة h زوجية.

ب- أشرح كيف تنشئ (C_h) ثم أنشئه.

ج- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين:

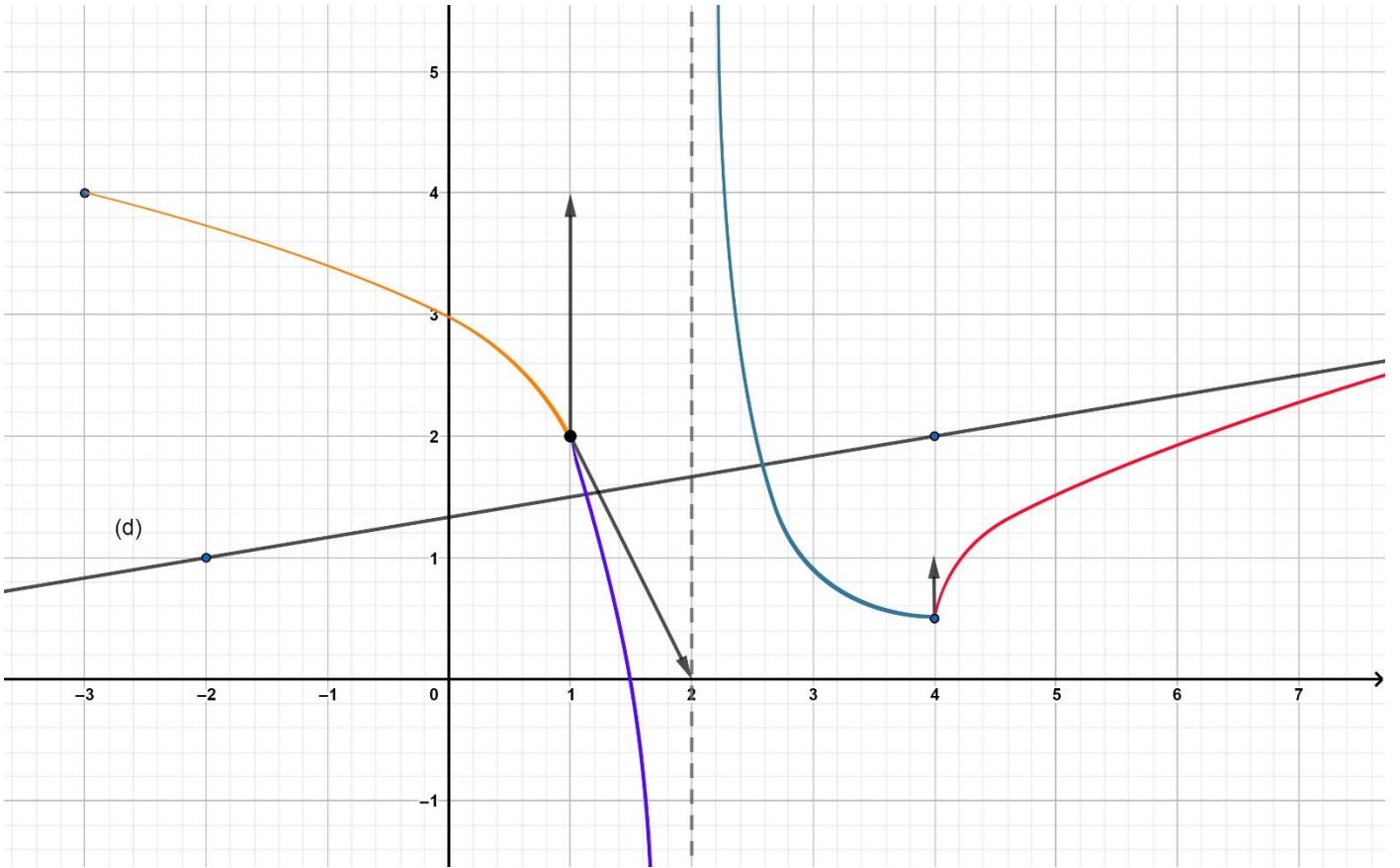
$$f(x) = x + m \quad \text{و} \quad f(x) = m$$

◀ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ▶

حل الوظيفة المنزلية ①

(حول الدوال العددية)

التمرين الأول:



(1) f غير مستمرة على D ؟

خطأ. الدالة f مستمرة، لأنه يمكن رسمها بدون رفع القلم.

(2) f غير مستمرة عند 1 ؟

خطأ. لأن $\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = f(1)$

(3) f تقبل الاشتقاق عند 1 ؟

خطأ. لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right] = +\infty$$

(4) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلان على D ؟

خطأ. لأن: (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة.

(5) f تقبل الاشتقاق على يمين 4؟

خطأ. لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \right] = +\infty$$

(6) f تقبل الاشتقاق على يسار 1؟

خطأ. لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right] = +\infty$$

(7) الدالة f متناقصة على $[-3; 2[\cup]2; 4]$ ؟

صحيح. واضح من الرسم

$$(8) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = +\infty \text{ ؟}$$

صحيح. لأن (C_f) يقبل نصف مماس على يسار الـ 1 عمودي موجه نحو الأعلى.

$$(9) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = +\infty$$

صحيح. لأن (C_f) يقبل نصف مماس على يمين الـ 4 عمودي موجه نحو الأعلى

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2 \quad (10)$$

خطأ. لأن: ميل المماس من اليمين هو:

$$a = \frac{2-0}{0-1} = -2$$

$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{3}{4} \quad (11)$$

خطأ. لأن: ميل المستقيم (Δ) هو

$$a = \frac{2-1}{4-(-2)} = \frac{1}{6}$$

التمرين الثاني

(1)

أ/ حساب النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3 - 3x^2 + 3x - 5] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) \right] = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - 3x^2 + 3x - 5] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) \right] = -\infty$

ب/ دراسة تغيرات الدالة g :

أولاً: حساب $g'(x)$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستخدم المميز Δ

$$\Delta = (-6)^2 - 4(3)(3) = 0$$

ومنه المعادلة لها حل مضاعف هو:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

ومنه:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$$

لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما.

ولدينا $g'(1) = 0$ ، ومنه الدالة g تنعدم ولا تغير اشارتها.

ثانيا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

(2) أ/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g رتيبة ومتزايدة على مجال تعريفها ،

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$ و $g(2) = -3$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times g(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.

ب/ حصر العدد α :

α	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	...	$+\infty$
$g(\alpha)$	-3	-2.6	-2.2	-1.8	-1.2	-0.6	0.9	0.9	...	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن: $2.5 < \alpha < 2.6$

ج/ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

(1) تعيين نهايات الدالة f :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

(2) تحديد الأعداد الحقيقية c, b, a :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(ax + b)(x-1)^2 + c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^3 + x^2(-2a + b) + x(a - 2b) + b + c}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -3 \\ a - 2b = 3 \\ b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$$

(3) أ- تبين أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً (d) :

ليكن: $y = x - 1$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2} - (x-1) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \right] = 0$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f) :

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2}{(x-1)^2} > 0$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+		+
الوضعية	(C_f) فوق (d)		(C_f) فوق (d)

(4) أ- دراسة تغيرات الدالة f :

أولاً: حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 4}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط في المقام

ثانياً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	α	$-\infty$
$g(x)$	-	-	0	+
$(x-1)^3$	-	+	+	+
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

ب- تبين أن (C_f) يقطع مرة واحدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β :

لدينا: $f(0) = 1$ و $f(-1) = -1.5$

ولدينا $f(-1) \times f(0) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β حيث: $-1 \leq \beta \leq 0$

ج- تبين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$:

يكفي أن نثبت أن: $f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} = 0$

لدينا سابقاً: $g(\alpha) = 0$ ، إذن:

$$f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} = \alpha - 1 + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)^2} + \frac{2}{(\alpha - 1)^2} - \frac{6}{(\alpha - 1)^2} \\
&= \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5}{(\alpha - 1)^2} \\
&= \frac{g(\alpha)}{(\alpha - 1)^2} = \frac{0}{(\alpha - 1)^2} = 0
\end{aligned}$$

حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$2.5 < \alpha < 2.7$$

$$1.5 < \alpha - 1 < 1.7$$

$$2.25 < (\alpha - 1)^2 < 2.89$$

$$\frac{1}{2.89} < \frac{1}{(\alpha - 1)^2} < \frac{1}{2.25}$$

$$\frac{6}{2.89} < \frac{6}{(\alpha - 1)^2} < \frac{6}{2.25}$$

$$2.07 < f(\alpha) < 2.66$$

(5) إنشاء (C_f) :

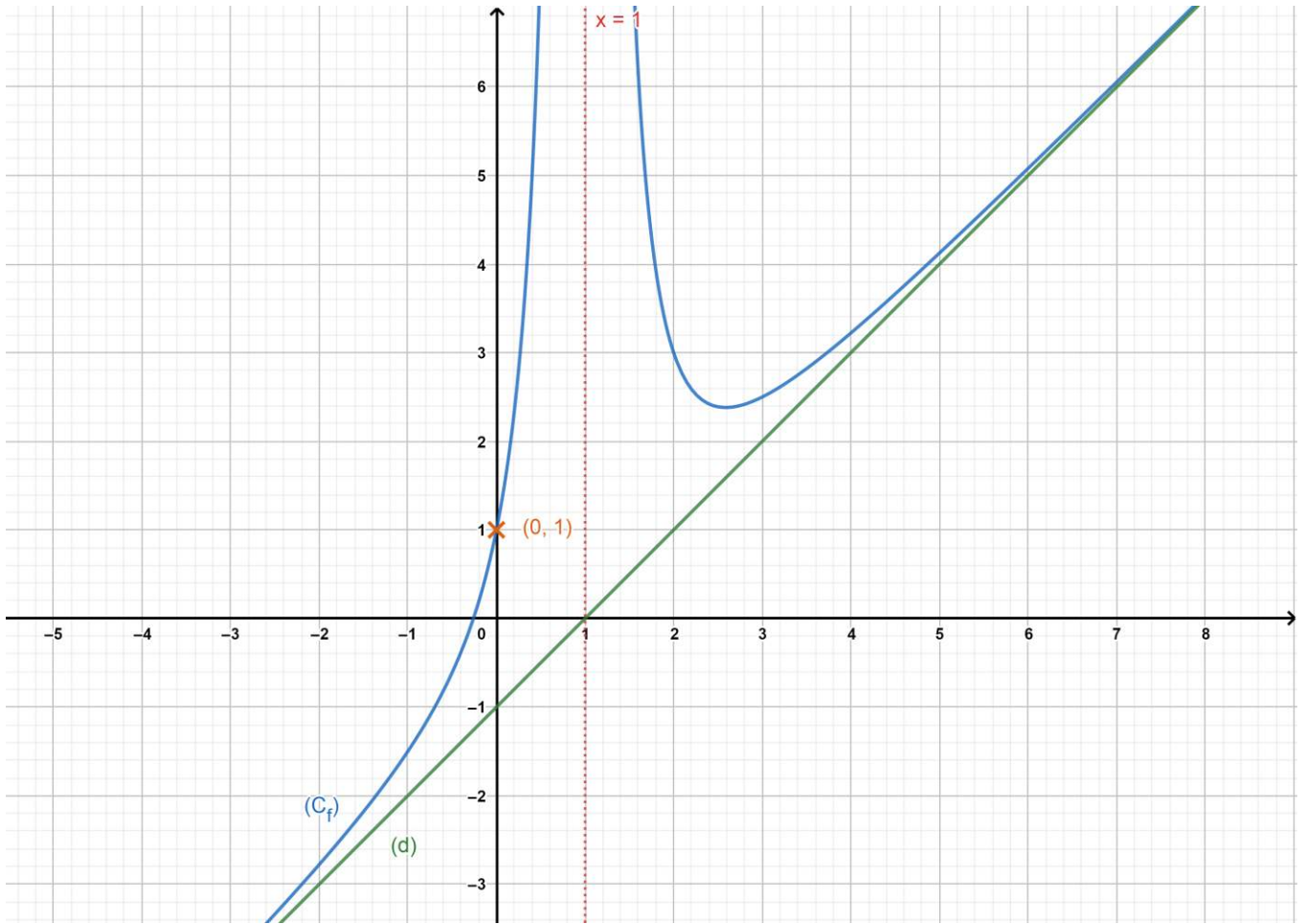
حساب $f(0)$:

$$f(0) = 0 - 1 + \frac{2}{(0 - 1)^2} = 1$$

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 1$
- نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (yy')

- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(6) أ- تبين أن h زوجية:

لدراسة شفعية دالة (زوجية / فردية): نبين مايلي:

لتبين أن الدالة f فردية	نبين أن: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$
لتبين أن الدالة f زوجية	نبين أن: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$



لدينا: $x \in D_h$ معناه: $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

معناه: $x < -1$ أو $-1 < x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $-x > 1$ أو $1 > -x > -1$ أو $-x < -1$

معناه: $-x \in]1; +\infty[$ أو $-x \in]-1; 1[$ أو $-x \in]-\infty; -1[$

معناه: $-x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

ومنه: $-x \in D_h$

ولدينا: $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$

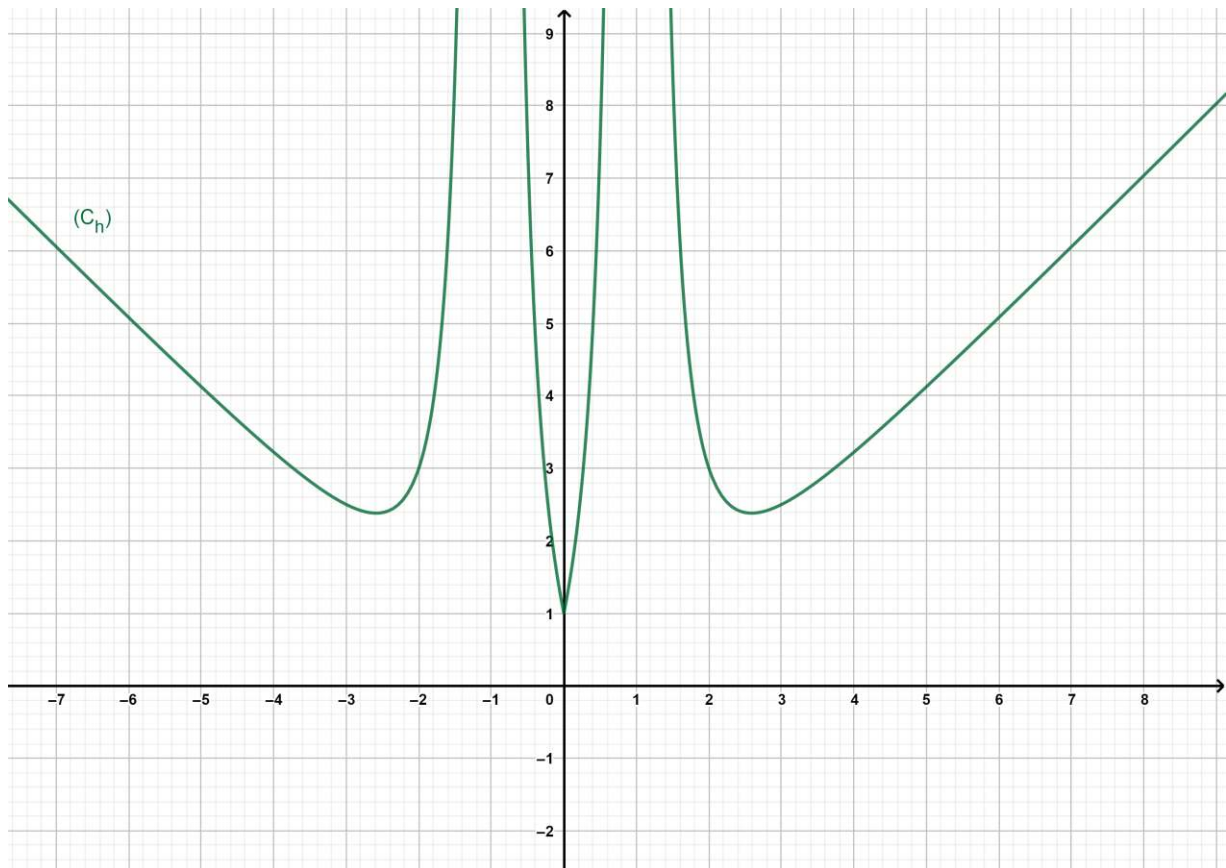
ومنه الدالة h زوجية.

ب/ انشاء (C_h) :

لدينا: $f(|x|) = h(x)$ ومنه:

لما $x \geq 0$ ، يكون (C_h) منطبقا على (C_f)

ولما: $x \leq 0$ ، يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب (yy')



أولاً: $f(x) = m$

لما	$m < 1$	المعادلة تقبل حل وحيد سالب
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حل وحيد معدوم
لما	$1 < m < f(\alpha)$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب
لما	$m = f(\alpha)$	المعادلة تقبل حلين موجبين أحدهما: $x = \alpha$
لما	$m > f(\alpha)$	المعادلة تقبل ثلاث حلول موجبة

ثانياً: $f(x) = x + m$

لما	$m \leq -1$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$-1 < m < 1$	المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حلان هما: $x = 0, x = 2$
لما	$m > 1$	المعادلة تقبل حلان موجبان متمايزان