

موضوع الرياضيات لشعبة تقني رياضي بكالوريا 2011

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

دورة: جوان 2011

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: تقني رياضي

المدة: 04 ساعات ونصف

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E) \quad z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، ثم اكتب حلولها على الشكل المثلثي.

(2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقاط A, B, C التي لاحقاتها على

الترتيب: $z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ ، $z_C = \sqrt{3} - i$ ، نضع: $L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(أ) اكتب L على الشكل الأسّي.

(ب) أثبت أن: $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$ ، ثم استنتج أن صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه وتحديد

عناصره المميزة.

(ج) استنتج نوع المثلث ABC ثم احسب مساحته S .

التمرين الثاني: (06 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{a+b \ln 2x}{4x^2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان و (C_f)

المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ عيّن a و b بحيث يكون المماس في النقطة $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ للمنحنى (C_f) موازيا لحامل محور القواصل.

2/ الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1+2 \ln 2x}{4x^2}$ و (C_g) المنحنى الممثل لها في

المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، فسّر النتيجة هندسيا.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) حل في $]0; +\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$.

(د) أنشئ (C_g) .

3/ (أ) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = \frac{1 + \ln 2x}{2x}$. احسب $h'(x)$.

(ب) تحقق أن: $g(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$
- 1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثم استنتج أن: $u_n > 1$
- 2/ ادرس اتجاه تغير (u_n) ثم بين أنها متقاربة، احسب نهاية (u_n) .
- 3/ ليكن الجداء p_n المعروف كما يلي: $p_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$
- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$
- 4/ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = \ln u_n$ حيث $\ln$ دالة اللوغاريتم النيبيري
- عبر بدلالة p_n عن S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ثم احسب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$

التمرين الرابع: (05 نقاط)

- أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:
- 1/ المعادلة: $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولاً في مجموعة الأعداد الصحيحة
- 2/ في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون: $3421 + 1562 = 5413$
- 3/ باقي القسمة الإقليدية للعدد: $3^{2011} + 3^2 + 1$ على 7 هو: 6
- 4/ الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- أ- المستوي (ρ) الذي معادلته $2x + y - z + 1 = 0$ والمسقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2; 1; -1)$ و $\vec{u}(1; -1; 1)$ شعاع توجيهه لا يشتركان في أية نقطة.
- ب- معادلة المستوي (Q) الذي يشمل مبدأ المعلم O ويوازي المستوي (ρ) هي: $x - y + z = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط A, B, C و D حيث:

$$\overrightarrow{AD}(1; 5; 2), \overrightarrow{BD}(0; 7; 3), \overrightarrow{CD}(1; -3; 7) \text{ و } C(2; 8; -4)$$

1/ بين أن النقط A, B, D تعين مستويا.

2/ بين أن المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD)

3/ I المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

أ) بين أن المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDI)

ب) عين معادلة للمستوي (CDI) واكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

ج) استنتج إحداثيات النقطة I

4/ احسب الأطوال AB, CD, DI واستنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$

$$(\text{مساحة رباعي الوجوه} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع})$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$$L = \frac{-4\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{5 + 3i} \text{ العدد المركب المعروف كما يلي:}$$

1/ أ) اكتب L على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.

ب) بين أن: $L^{12} + 1 = 0$ ، ثم احسب: $(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} + (5 + 3i)^{12}$.

ج) n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي أثبت أن: $L^{4n} + L^{4p} = 0$.

2/ أ) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 5 + 3i$ و $z_B = 5 - 3i$ عين اللاحقة z_A للنقطة

A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

ب) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA' .

التمرين الثالث: (07.5 نقطة)

أ) الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$$

(C_f) منحناها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس تغيّرات الدالة f .

2- عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

3- بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة لمماس (C_f) عندها.

4- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = f(x) - x$.

أ- ادرس تغيّرات الدالة g .

ب- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,7 < \alpha < 2,8$.

5- أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = 0$.

ب- ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$ والمنحنى (C_f) .

ب) (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

1- باستخدام (C_f) والمستقيم (Δ) مثّل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل.

2- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq U_n < \alpha$.

3- بيّن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

4- استنتج أن (U_n) متقاربة و بيّن أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

التمرين الرابع: (04 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.

1) تحقّق أن: $4 \equiv -3[7]$ ثم بيّن أن: $A_3 \equiv 6[7]$.

2) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7.

3) بيّن أنه إذا كان n فرديا فإن: $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7 واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد

A_{2011} على 7.

4) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7؟

التصحيح الرسمي لموضوع الرياضيات شعبة تقني رياضي بكالوريا 2011

الإجابة النموذجية و سلم التقييم

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2011

المادة : رياضيات الشعبة : تقني رياضي

محلل الموضوع	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة
المجموع	الموضوع الأول	مجزأة
04	التمرين الأول: (04 نقاط) 1/ حلول المعادلة (E) : $z_1 = \sqrt{3} - i$ ، $z_2 = \sqrt{3} + i$ $z_1 = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$ و $z_2 = 2 \left[\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right]$ 2/ أ) $L = e^{\frac{4\pi}{3}}$ ب) إثبات أن $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$ ومنه A صورة C بالدوران الذي مركزه النقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3} + i$ وقيس زاويته $\frac{4\pi}{3}$ ج) المثلث ABC مثلث متقايس الساقين $AB = BC$ مساحته s حيث $s = \frac{1}{2} AC \times BH = \sqrt{3}ua$ حيث H منتصف [AC]	0,25×2 0,5×2 0,5 0,25×3 0,5 0,75
06	التمرين الثاني: (06 نقاط) 1/ من $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ نجد $a = 1$ ثم من $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ نجد $b = 2$ 2/ أ) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ب) $g'(x) = \frac{-\ln 2x}{x^2}$ وإشارته ج) g متزايدة تماماً على $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ و متناقصة تماماً على $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ د) إنشاء (C_f) 3/ أ) $h(x) = -\frac{\ln 2x}{2x}$ ب) التحقق $g(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x}$ ثم $G(x) = -\frac{3+2\ln 2x}{4x}$	0,5×2 0,25+0,5 0,25×2 0,5+0,25 0,25 0,25 0,5 0,5 0,5 0,75+0,25

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	محاور الموضوع
مجموع	مجزأة		
05	0.5×2	التمرين الثالث: (05 نقاط) 1/ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، $u_n > 1$	اتجاه تغير متتالية
	1	2/ حيث $u_n = f(n)$: $f(x) = 1 + \frac{1}{x(x+2)}$ ، $f'(x) = -\frac{2x+2}{x^2(x+2)^2} < 0$ من أجل $x > 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}^*$	البرهان بالتراجع
	0.5×2	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ ، (u_n) متناقصة تماماً ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة	نهاية متتالية
	0.25	3/ البرهان بالتراجع أن: $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$	
	0.75	من أجل : $n=1$: $p_1 = u_1 = \frac{4}{3}$ نفرض $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$ ولدينا : $p_{n+1} = \frac{2n+4}{n+3} = p_n \times u_{n+1}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$	
	0.5×2	4/ $s_n = \ln p_n$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \ln 2$	
05	1	التمرين الرابع: (05 نقاط) 1/ صحيح لأن: $PGCD(21;14) = 7$ و 7 لا يقسم 40	التعداد
	1	2/ خطأ لأن: $3421 + 1562 = 5313$	الموافقة القواسم
	0.5×3	3/ خطأ لأن: $3^{2012} = 3^{\alpha} [7]$ و $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2011} = \frac{3^{2012} - 1}{2}$ حيث $\alpha \in \{0,1,2,3,4,5\}$ و $2012 = 6 \times 335 + 2$ ومنه $[7] = \frac{3^{2012} - 1}{2} = 4[7]$	هندسة قضائية
	1	4/ صحيح لأن: $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{u}$ شعاع توجيه (d) متعامدان وعليه $(P) \parallel (d)$ و $A \in (P)$ و $A \notin (d)$ إذن $(P) \cap (d) = \emptyset$	
	0.5	ب) خطأ لأن: معادلة (Q) هي : $2x + y - z = 0$ <u>ملاحظة:</u> في كل سؤال تمنح 0.25 للاختيار الصحيح والباقي للتبرير.	

العلامة		عناصر الإجابة	محلل الموضوع									
المجموع	مجزأة	الموضوع الثاني										
4.5	0.25×3	التمرين الأول: (04.5 نقطة) 1/ $\overline{AD}$ و $\overline{BD}$ غير متوازيين فالنقاط D, B, A تقعن مستويا	تطبيقات الجداء السمي التمثيل									
	1	2/ بما أن $\overline{CD} \cdot \overline{BD} = 0$ و $\overline{CD} \cdot \overline{AD} = 0$ فإن: (CD) يعامد (ABD)	الوسيطي لمستقيم									
	0.5	3/ (CD) عمودي على (AB) و (CI) عمودي على (AB) ومنه (AB) يعامد (CDI)	الحجوم									
	0.5×2	ب) $\overline{AB}(1, -2, -1)$ نأخذ للمستوي (CDI) و C نقطة منه فإن المعادلة الديكارتية هي: $z \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 2 + z \\ y = -2z \\ z = 1 - z \end{cases}$										
	0.5	$I\left(\frac{1}{6}, \frac{11}{3}, \frac{17}{6}\right)$ (ج)										
	0.25×3	$AB = \sqrt{6} \text{ , } CD = \sqrt{59} \text{ , } DI = \frac{\sqrt{354}}{6} / 4$										
04	0.5×2	التمرين الثاني: (04 نقاط) $L = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (أ/1)	الشكل المثلثي موافق التشابه									
	0.5×2	ب) لدينا $L^{12} = -1$ ومنه $L^{12} + 1 = 0$ و $(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} + (5+3i)^{12} = 0$										
	0.75	ج) $L^{4n} + L^{4p} = (-1)^n + (-1)^p = 0$										
	0.75	د) $z_A = -1 - 9i$ (أ/2)										
	0.5	ب) $z_C = 3 - 3i$										
7.5	0.25×2	التمرين الثالث: (07.5 نقطة) أ- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ (1)										
	0.25×2	- المشتق وإشارته : $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$										
	0.25	- جدول التغيرات: <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>-1</td> <td>3</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$		+	$f(x)$	-1	3	
	x	$-\infty$	$+\infty$									
$f'(x)$		+										
$f(x)$	-1	3										
0.25×2	2- - المستقيمان المقاربان معادلتهما $y = 3$, $y = -1$											

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
المجموع	مجزأة		
	0.5	(3) $f''(x) = \frac{4e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$ ، إشارته : $\rightarrow + \quad 0 \quad -$	الدوال العديدية والمشتقات
	0.25	نقطة الانعطاف $\omega(0,1)$	
	0.25	معادلة المماس : $y = x + 1$	
	0.25×2	(4) أ- تغيرات g : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$	
	0.25	المشتق : $g'(x) = -\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ وهو سالب	
	0.25	جدول التغيرات	
	0.25	ب- g مستمرة ومتناقصة تماماً على $[2,7; 2,8]$ ، $g(2,7) = 0,048$ ، $g(2,8) = -0,029$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α وحيد حيث $g(\alpha) = 0$ و $2,7 < \alpha < 2,8$	
	0.25×2	(5) أ- $f(x) = 0$ تكافئ $x = -\ln 3$ ب- رسم C_f و المنصف الأول والمماس.	
	0.25	ب) 1- تمثيل : U_2, U_1, U_0 2- إثبات أن : $1 \leq U_n < \alpha$	
	0.75	$2,7 < \alpha < 2,8$ و $U_0 = 1$ لأن $1 \leq U_0 < \alpha$ نفرض $1 \leq U_n < \alpha$ و f متزايد تماماً ومنه $f(1) \leq f(U_n) < f(\alpha)$ ومنه $1 \leq U_{n+1} < \alpha$ و $f(1) > 1$ ومنه $1 \leq U_n < \alpha$ من أجل كل عدد طبيعي n	
	0.25	3- المتكالية (U_n) متزايدة تماماً : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) > 0$ لأن $1 \leq U_n < \alpha$	
	0.25×2	4- (U_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$	
		التمرين الرابع : (04 نقاط)	الموافقات في $\mathbb{Z}$
	0.25	(1) $4 = -3[7]$	
	0.5	$A_3 = 6[7]$ ومنه $A_3 = -1[7]$ أي $A_3 = 2^3 + 3^3 + (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 [7]$	
04	0.75	(2) $2^{3k+2} = 4[7]$ ، $2^{3k+1} = 2[7]$ ، $2^{3k} = 1[7]$	
	0.75	$3^{6k+5} = 5[7]$ ، $3^{6k+4} = 4[7]$ ، $3^{6k+3} = 6[7]$ ، $3^{6k+2} = 2[7]$ ، $3^{6k+1} = 3[7]$ ، $3^{6k} = 1[7]$	
	0.75	(3) $A_n = -1[7]$: إذا كان n فردياً فإن : $A_n = 2^n + 3^n + (-3)^n + (-2)^n + (-1)^n [7]$	
	0.25	ومنه $A_{2011} = 6[7]$ ، $A_{2011} + 1$ يقبل القسمة على 7 ، الباقي هو 6	
	0.75	(4) $A_{432} = 6[7]$ ومنه $A_{432} = 2 \times 2^{3 \times 677+1} + 2 \times 3^{6 \times 238+4} + 1[7]$	