



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (03 نقاط)

- أجب بصحيح أو خطأ :

(1)- حجم المجسم المولد بالدوران حول محور الفواصل للتمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[1, e]$ بـ :

$$f(x) = \frac{2(Lnx)^2}{\sqrt{x}} \text{ هو : } V = \frac{4\pi}{5} uv \text{ ؟}$$

$$(2) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2023}{x}\right)^x = \frac{1}{2023}$$

$$(3) - \text{من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : 1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3 + 3^{\frac{3}{2}} + \dots + 3^{\frac{n}{2}} = \frac{(1 + \sqrt{3}) \left(3^{\frac{n+1}{2}} - 1\right)}{2}$$

$$(4) - (U_n) \text{ و } (V_n) \text{ متتاليتان عدديتان معرفتان على } \mathbb{N}^* \text{ بـ : } U_n = \frac{1}{2} - \frac{e}{n} , V_n = Ln \sqrt{\frac{3}{n} + e}$$

المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان ؟

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(I)- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من 2^n ، 3^n على 11 .

(2) - n عدد طبيعي ، α عدد صحيح ، نضع : $A_\alpha = 2023^{2n+1} + \alpha \times 4^{5n+1}$

(أ) - تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{1444} \equiv 0 [11]$.

(ب) - عين الأعداد الصحيحة α التي من أجلها A_α يقبل القسمة على 11 من أجل كل عدد طبيعي n .

(ج) - أوجد قيم العدد الطبيعي t بحيث : $1443^t + 1444^t \equiv 0 [11]$.

(II) - نضع في علبة بطاقات مرقمة ببواقي قسمة العدد 2^n على 11 ، نسحب من العلبة 3 بطاقات على التوالي وبدون إرجاع

لتكن الحادثتان التاليتان : A البطاقات المسحوبة تحمل أرقما أولية ، B البطاقات المسحوبة تحمل أرقما فرديا

(1) - أحسب احتمال الحوادث : A ، B ، $A \cap B$. استنتج احتمال الحادثة : $A \cup B$.

(2) - أحسب احتمال سحب بطاقة تحمل رقما أوليا علما أنه فردي .

(3) - ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد البطاقات التي تحمل رقما أوليا المتبقية في اللعبة

- عرف قانون احتمال X ثم أحسب أمله الرياضي .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) - $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$

(أ) - تحقق أن 2 هو جذر $P(z)$. (ب) - حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $P(z) = 0$.

(2) - في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقاط : A ، B و C تحقق لواحقها على الترتيب :

$$z_A = 2 \quad , \quad z_B = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_C = 1 - i\sqrt{3}$$

(أ) - أكتب كل من z_B ، z_C و $\frac{z_B}{z_C}$ على الشكل الأسّي . (ب) - عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا .

(ج) - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي فردي n : $z_B^{3n} + z_C^{3n} + 2^{3n+1} = 0$

(د) - علم النقاط : A ، B و C ، ماهي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟

(3) - M و M' نقطتان من المستوي ذات اللاحقتان : z و z' على الترتيب حيث : $z' = \frac{z_A \times \bar{z} - z_C}{z - z_C}$

(أ) - لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $(z - z_B)(\bar{z} - z_C) = 1$ ، عين ثم أنشئ (E) .

(ب) - تحقق أن : $z' = z_A + \frac{z_C}{z - z_C}$

(ج) - بين أنه عندما تمسح النقطة M المجموعة (E) فإن النقطة M' تمسح دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) - الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2x^2 - 5x + 4)e^{x-2} + 1$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-	+
$g(x)$		$7e^{-\frac{5}{2}} + 1$		

(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (O, $\vec{i}, \vec{j}$) حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$

(1)- أنقل ثم أكمل جدول تغيرات الدالة g ، استنتج إشارة g(x) على $\mathbb{R}$. (2 -) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) - 1 > 0$

(3)- برهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) - 1 = 2g'(x) - g''(x) + 4e^{x-2}$

(4)- أحسب : $S = \int_1^2 (g(x) - 1)dx$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا .

(II)- لتكن الدالة f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = \left(\frac{2x-3}{x-1}\right)(e^{x-2} + 1)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (O, $\vec{i}, \vec{j}$) .

(1)- (أ)- أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (ب)- أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. فسر هذه النتائج بيانيا .

(2)- أثبت أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، استنتج اتجاه الدالة f على D_f . شكل جدول تغيراتها .

(3)- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 = x₀ .

(4)- أحسب : f(0) ، $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، ثم أنشئ (T) و (C_f) .

(III)- لتكن الدالة h المعرفة على $D_h = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$: $h(x) = \left(\frac{2|x|-3}{|x|-1}\right)(e^{|x|-2} + 1)$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

(1)- أثبت أن الدالة h دالة زوجية . (2)- اشرح كيفية إنشاء (C_h) إنطلاقاً من (C_f) .

(3)- أنشئ (C_h) . (استعمل الألوان للتوضيح)

التمرين الأول: (04 نقاط)

I - (1) - أوجد D_{119} مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 119 .

(2) - أوجد الثنائيات (a, b) من $(\mathbb{N}^*)^2$ حيث : $\begin{cases} PGCD(a, b) = 17 \\ PPCM(a, b) = 2023 \end{cases}$

II - (1) - لتكن في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) : 289x - 34y = 2023$

(1) - أوجد $PGCD(289, 34)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

(2) - بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلاً للمعادلة (E) فإن y مضاعف للعدد 17 . ثم استنتج في $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E) .

(3) - أوجد الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y \leq 52$

III - (1) - عدد طبيعي فردي ، باقي قسمته على 17 هو 16 ، فما هو باقي قسمته على 34 ؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) - في ألعاب البحر المتوسط التي احتضنها ولاية وهران (بالجزائر) في جوان 2022 ، تحصلت الجزائر في رياضة الملاكمة على :

7 ميداليات ذهبية ، 4 ميداليات فضية و ميدالية واحدة برونزية . وضعت هذه الميداليات في صندوق

- نسحب من الصندوق ميداليتين في آن واحد . نعتبر اللعبة التالية : يربح لاعب 20DA عند سحب ميدالية ذهبية ، يربح 10DA عند سحب ميدالية فضية و يخسر 10DA عند سحب ميدالية فضية

- ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب ، عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي

(2) - بعد نجاح رياضة الملاكمة في الجزائر ترشح للمشاركة في ألعاب البحر المتوسط التي ستقام بفرنسا : 20 ملاكمة (إناث) من بينهم الملاكمة : إيمان خليف و 18 ملاكم (ذكور) من بينهم الملاكم : بن قاسمية محمد .

تم اختيار مجموعة مكونة من ثلاث ملاكمين للمشاركة في هذه الظاهرة الرياضية

- احسب احتمال الحوادث التالية : A : المجموعة تضم ثلاث ذكور . B : المجموعة تضم ذكر وأنثيين .

C : المجموعة تضم إيمان أو محمد .

D : المجموعة تضم ثلاث إناث ولا تضم الملاكمة إيمان بعد ما تم إقصائها نهائياً من المنافسة .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$I) - \text{ لتكن المتتالية } (U_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} : \begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{9U_n + 2}{U_n + 8} \end{cases}$$

$$1) - \text{ أ) تحقق أنه من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : U_{n+1} = 9 - \frac{70}{U_n + 8}$$

ب) - باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq 2$.

ج) - أثبت أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$. ه) - استنتج مما سبق أن المتتالية (U_n) متقاربة.

$$2) - \text{ أ) أثبت أنه من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : 2 - U_{n+1} \leq \frac{7}{8}(2 - U_n)$$

$$\text{ب) - استنتج أنه من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : 0 \leq 2 - U_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{7}{8} \right)^n \text{ ، ثم أحسب : } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

$$II) - \text{ لتكن المتتالية } (V_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} : V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$$

1) - أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_0 .

2) - أكتب بدلالة عبارة n الحد العام V_n ثم U_n . 3) - أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ ، ثم استنتج للمرة الثانية حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

4) - أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = U_0(V_0 - 1) + 10U_1(V_1 - 1) + 10^2U_2(V_2 - 1) + \dots + 10^nU_n(V_n - 1)$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) - a و b عددا حقيقيان موجبان تماما ، باستعمال المساواة : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ أثبت أن :

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln(a)$$

$$II) - \text{ لتكن الدالة } g \text{ المعرفة على المجال } D_g =]1, +\infty[: g(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{2e}} + \frac{1}{2}$$

$$1) - \text{ أحسب : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) , \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

(2) - أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على D_g .

(3) - أحسب $g(3)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على D_g .

III - لتكن الدالة f المعرفة على المجال $D_f = [1, +\infty[$: $f(x) = \begin{cases} (x-1) \ln \sqrt{\frac{x-1}{2e}} ; x > 1 \\ 0 ; x = 1 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس ($O, \vec{i}, \vec{j}$).

(1) - أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x-1}$. ماذا تستنتج ؟ فسر هذه النتيجة بيانيا . (2) - أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) - أثبت أنه من أجل كل x من $[1, +\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ، شكل جدول تغيرات الدالة f على D_f .

(4) - أ) أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل عند نقطة A فاصلتها α حيث : $\alpha > 1$ يطلب تعيينها .

ب) - أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة A . ج) - أنشئ (T) و (C_f) .

(5) - لتكن الدالة h المعرفة على المجال $D_h = [1, +\infty[$: $h(x) = -f(x)$

- اشرح كيفية إنشاء (C_h) التمثيل البياني للدالة h إنطلاقاً من (C_f) . ثم أنشئ (C_h) في نفس المعلم السابق .

(6) - أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$: $\frac{x^2 - 2x}{x-1} = x - 1 - \frac{1}{x-1}$ ، ثم أحسب : $\int_2^a \frac{x^2 - 2x}{x-1} dx$

ب) - أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين الذي معادلتهما : $x = 2$ ، $x = \alpha$.

(استعمال التكامل بالتجزئة)

ج) - استنتج حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و (C_h) و المستقيمين الذي معادلتهما : $x = 2$ ، $x = \alpha$.

الأستاذة : بن زادي

بالتوفيق و النجاح في شهادة بكالوريا

الإجابة النموذجية + سلم التقييم :

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (03 نقاط) :

$$(1) \quad uv = \pi \int_1^e \frac{4(Lnx)^4}{x} dx \quad uv = \pi \int_1^e (f(x))^2 dx \quad uv = \frac{4\pi}{5} uv \quad \text{هو : } V = \frac{4\pi}{5} uv \quad ؟$$

$$V = 4\pi \left[\frac{(Lnx)^5}{5} \right]_1^e uv = \frac{4\pi}{5} uv \quad \text{و منه : الإجابة صحيحة} \dots\dots\dots (0.5\text{ن})$$

$$(2) \quad \text{من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما } x \text{ لدينا : } \left(1 + \frac{2023}{x}\right)^x = e^{xLn\left(1 + \frac{2023}{x}\right)}$$

$$\text{نضع : } t = \frac{1}{x} , x \rightarrow +\infty , t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2023}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{Ln(1+2023t)}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{2023 \times \frac{Ln(1+2023t)}{2023t}}$$

$$\text{بما أن : } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{Ln(1+X)}{X} = 1 \quad \text{و منه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2023}{x}\right)^x = e^{2023} \quad \text{و منه : الإجابة خاطئة} \dots\dots\dots (01\text{ن})$$

$$(3) \quad \text{نضع من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : U_n = (\sqrt{3})^n \quad (U_n) \text{ متتالية هندسية أساها } q = \sqrt{3} \text{ و حدها الأول } U_0 = 1$$

$$S_n = U_0 + U_1 + U_1 + \dots\dots\dots + U_n = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} \left[1 - (\sqrt{3})^{n+1} \right]$$

$$S_n = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 3} \right) \left[1 - 3^{\frac{n+1}{2}} \right] = \frac{(1 + \sqrt{3}) \left(3^{\frac{n+1}{2}} - 1 \right)}{2} \quad \text{و منه : الإجابة صحيحة} \dots\dots\dots (0.5\text{ن})$$

$$(4) \quad \text{من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}^* : U_{n+1} - U_n = \frac{e}{n(n+1)} > 0 \quad \text{و منه : } (U_n) \text{ متزايدة تماما على } \mathbb{N}^*$$

$$\text{من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}^* : n+1 > n , \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} , \frac{3}{n+1} + e < \frac{3}{n} + e , \sqrt{\frac{3}{n+1} + e} < \sqrt{\frac{3}{n} + e}$$

. $\mathbb{N}^*$ متناقصة تماما على (V_n) ، أي أن $V_{n+1} < V_n$: منه $Ln\sqrt{\frac{3}{n+1}+e} < Ln\sqrt{\frac{3}{n}+e}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0 : \text{منه} \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} Ln\sqrt{\frac{3}{n}+e} = Ln\sqrt{e} = \frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} Ln\left(\frac{1}{2} - \frac{e}{n}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

و منه :المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان الإجابة صحيحة (01ن)

التمرين الثاني: (05 نقاط)

$2^5 \equiv 10[11], 2^4 \equiv 5[11], 2^3 \equiv 8[11], 2^2 \equiv 4[11], 2^1 \equiv 2[11], 2^0 \equiv 1[11]$ - (1- I ،
 $2^{10} \equiv 1[11], 2^9 \equiv 6[11], 2^8 \equiv 3[11], 2^7 \equiv 7[11], 2^6 \equiv 9[11]$ (0.5ن)

بواقي قسمة 2^n على 11 تشكل متتالية دورية دورها $p = 10$.

$n =$	$10k$	$10k + 1$	$10k + 2$	$10k + 3$	$10k + 4$	$10k + 5$	$10k + 6$	$10k + 7$	$10k + 8$	$10k + 9$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	$[11]$

$3^5 \equiv 1[11], 3^4 \equiv 4[11], 3^3 \equiv 5[11], 3^2 \equiv 9[11], 3^1 \equiv 3[11], 3^0 \equiv 1[11]$ (0.5ن)

بواقي قسمة 3^n على 11 تشكل متتالية دورية دورها $p' = 5$.

$n =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4	$[11]$

(2-أ) لدينا : $2023 \equiv 10[11]$ أي أن : $2023 \equiv -1[11]$ و منه : $2023^{2n+1} \equiv -1[11]$ (لأن $2n+1$ فردي)

$4^{5n+1} = 2^{10n+2}$ و منه : $4^{5n+1} \equiv 4[11]$ ، $4^{5n+1} \equiv 4[11]$ و منه : $1444 \equiv 3[11]$ ، $A_{1444} \equiv (-1 + 3 \times 4)[11]$ أي أن :

..... (0.5ن) $A_{1444} \equiv 0[11]$

(ب-) لدينا : $4^{5n+1} \equiv 4[11]$ ، $2023^{2n+1} \equiv -1[11]$ ، A_α يقبل القسمة على 11 معناه : $A_\alpha \equiv 0[11]$.

$A_\alpha \equiv (-1 + 4\alpha)[11]$ ، $-1 + 4\alpha \equiv 0[11]$ ، $4\alpha \equiv 1[11]$ ، $12\alpha \equiv 3[11]$ ، $\alpha \equiv 3[11]$. و منه :

..... (0.5ن) A_α يقبل القسمة على 11 معناه : $\alpha = 11k + 3 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$n =$	$10k$	$10k + 1$	$10k + 2$	$10k + 3$	$10k + 4$	$10k + 5$ $5k + 1$	$10k + 6$ $5k + 1$	$10k + 7$ $5k + 2$	$10k + 8$	$10k + 9$	$k \in \mathbb{N}$ $k' \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	[11]
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4	1	3	9	5	4	[11]
$2^n + 3^n \equiv$	2	5	2	2	9	0	1	5	8	10	[11]

(0.5ن) $n = 11k + 5 \quad (k \in \mathbb{N})$

طريقة ثانية :

لدينا : $3 \equiv -8[11]$ ، $3^t \equiv (-2)^{3t}[11]$ و منه : $1444^t + 1443^t \equiv 0[11]$ يكافئ : $2^t + (-2)^{3t} \equiv 0[11]$.

$n =$	$10k$	$10k + 1$	$10k + 2$	$10k + 3$	$10k + 4$	$10k + 5$	$10k + 6$	$10k + 7$	$10k + 8$	$10k + 9$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	[11]
$(-2)^{3t} \equiv$	1	-8	9	-6	4	-10	3	-2	5	-7	[11]
$2^t + (-2)^{3t} \equiv$	2	5	2	2	9	0	1	5	8	10	[11]

$$n = 11k + 5 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_{10}^3 = 720$

(1) -البطاقات التي تحمل أرقاما أولية هي : 2, 3, 5, 7 و منه : $P(A) = \frac{A_4^3}{A_{10}^3} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$ (0.25ن)

(2) -البطاقات التي تحمل أرقاما فردية هي : 1, 3, 5, 7, 9 و منه : $P(B) = \frac{A_5^3}{A_{10}^3} = \frac{60}{720} = \frac{1}{12}$ (0.25ن)

(3) -البطاقات التي تحمل أرقاما فردية وأولية هي : 3, 5, 7 و منه : $P(A \cap B) = \frac{A_3^3}{A_{10}^3} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}$ (0.25ن)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{30} + \frac{1}{12} - \frac{1}{120}$$

و منه : $P(A \cup B) = \frac{13}{120}$ (0.25ن)

(0.25ن) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{10}$

(3) - قيم المتغير العشوائي : $x_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (0.25 ن)

(0.25 ن) $P(X = 2) = \frac{A_4^2 \times A_6^1 \times 3!}{A_{10}^3 \times 2! \times 1!} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$ ، $P(X = 1) = \frac{A_4^3}{A_{10}^3} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$

(0.25 ن) $P(X = 4) = \frac{A_6^3}{A_{10}^3} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$ ، $P(X = 3) = \frac{A_4^1 \times A_6^2 \times 3!}{A_{10}^3 \times 2! \times 1!} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}$

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(0.25 ن) $E(X) = \frac{1}{30} + \frac{6}{10} + \frac{3}{2} + \frac{4}{6} \approx 2.8$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(0.25 ن) (1) - $P(2) = 8 - 16 + 16 - 8 = 0$

(0.5 ن) (ب) - من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 4)$

$P(z) = 0$ من يكافئ : $z = 2$ أو $z^2 - 2z + 4 = 0$ ($\Delta = -12$)

(0.5 ن) $S = \{2, 1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\}$

(0.5 ن) (2) - $\frac{z_B}{z_C} = e^{\frac{i2\pi}{3}}$ ، $z_C = 2e^{\frac{-i\pi}{3}}$ ، $z_B = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$

(ب) - $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n = e^{\frac{i2n\pi}{3}}$ ، $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n = e^{\frac{i2n\pi}{3}}$ حقيقي يكافئ : $\frac{2\pi n}{3} = k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) و منه :

$\frac{3}{n}$: لدينا ، $2n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$) و $PGCD(2, 3) = 1$: حسب مبرهنة غوص : $\frac{3}{n}$

(0.5 ن) $n = 3k$ ' ($k' \in \mathbb{N}$)

(ج) - n من فردي معناه : $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

$(z_B)^{3n} = 2^{3n} (e^{i(2k+1)\pi}) = 2^{3n} e^{i\pi} = -2^{3n}$

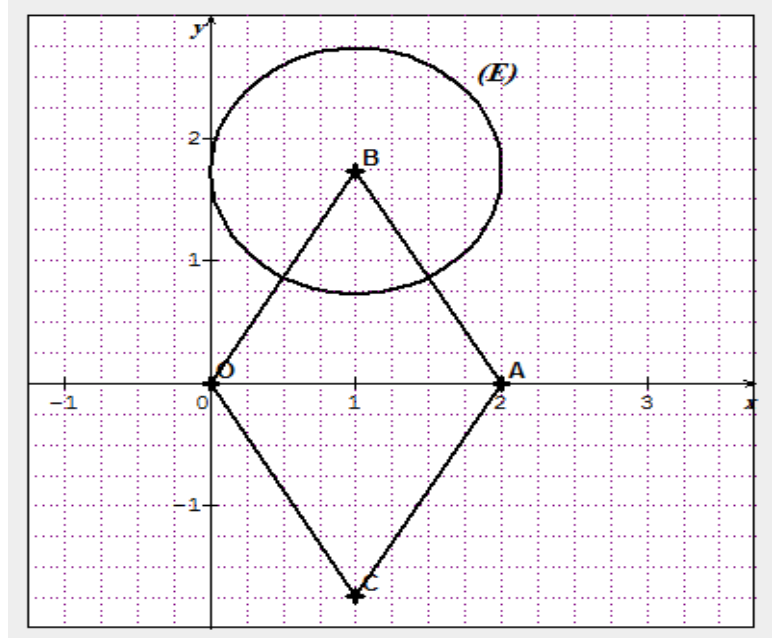
(0.5 ن) $(z_C)^{3n} = 2^{3n} (e^{-i(2k+1)\pi}) = 2^{3n} e^{-i\pi} = -2^{3n}$

$(z_B)^{3n} + (z_C)^{3n} + 2^{3n+1} = -2^{3n} - 2^{3n} + 2^{3n+1} = -2^{3n+1} + 2^{3n+1} = 0$

(د-) لدينا : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$ و $(z_B = z_A - z_C)$ و $OB = OC = 2$ (متوازي أضلاع له ضلعان متتبعان متقايسان)

ومنه : الرباعي $OBAC$ معين (0.5ن)

- تعليم النقاط : (0.5ن)



$$(2-أ) (z - z_B)(z - z_C) = (z - z_B)\overline{(z - z_C)} = 1 \text{ ومنه : } BM = 1$$

$$(\text{نذكر أن : } z \cdot \bar{z} = |z|^2)$$

ومنه : (E) هي دائرة مركزها B و نصف قطرها $r = 1$ (0.5ن)

$$(ب-) z' = z_A + \frac{z_C}{z - z_C} = \frac{z_A \cdot \bar{z} - z_A \cdot z_C + z_C}{z - z_C} = \frac{z_A \cdot \bar{z} - 2 \cdot z_C + z_C}{z - z_C} = \frac{z_A \cdot \bar{z} - z_C}{z - z_C}$$

$$(ج-) AM' = \frac{OC}{BM} \text{ ومنه : } |z' - z_A| = \left| \frac{z_C}{z - z_C} \right| = \left| \frac{z_C}{z - z_B} \right| = \left| \frac{z_C}{z - z_B} \right|$$

وبما أن : $M \in (E)$ فإن : $BM = 1$ ومنه : $AM' = 2$ ومنه : مجموعة النقط M' هي دائرة مركزها A

و نصف قطرها $r = 2$ (0.5ن)

التمرين الرابع : (07 نقاط) :

$$(0.75ن) \dots \dots \dots \cdot g(1) = e^{-1} + 1 \text{ ، } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 \text{ ، } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	1	$7e^{\frac{-5}{2}} + 1$	$e^{-1} + 1$	$+\infty$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) > 0$ (0.25 ن)

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{x-2} > 0$ ، $2x^2 - 5x + 4 > 0$ ($\Delta = -7 < 0$) ومنه : $g(x) - 1 > 0$ (0.25 ن)

$$g''(x) = (2x^2 + 3x - 2)e^{x-2} , 2g'(x) = (4x^2 - 2x - 2)e^{x-2} : \mathbb{R}$$

$$2g'(x) - g''(x) + 4e^{x-2} = (4x^2 - 2x - 2 - 2x^2 - 3x + 2 + 4)e^{x-2}$$

$$2g'(x) - g''(x) + 4e^{x-2} = (2x^2 - 5x + 4)e^{x-2} = g(x) - 1$$

$$S = \int_1^2 (g(x) - 1) dx = \left[2g(x) - g'(x) + 4e^{x-2} \right]_1^2 = \left[(2x^2 - 9x + 13)e^{x-2} \right]_1^2$$

$$S = \int_1^2 (g(x) - 1) dx = 3 - 6e^{-1}$$

هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $S = (3 - 6e^{-1}) cm^2$

..... (0.25 ن) $x = 2$ ، $x = 1$ ، $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty : \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3)(e^{x-2} + 1) = -e^{-1} - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0^- \end{cases} \quad -(-1) \quad -(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty : \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3)(e^{x-2} + 1) = -e^{-1} - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0^+ \end{cases}$$

..... (0.25 ن) (C_f) يقبل مستقيما مقاريا عموديا معادلته : $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 : \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - 3}{x - 1} \right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-2} + 1) = 1 \end{cases}$$

..... (0.25 ن) (C_f) يقبل مستقيما مقاريا عموديا معادلته : $y = 2$ بجوار $-\infty$

(0.25ن) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{x-1} \right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-2} + 1) = +\infty \end{cases}$

(2) f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$: $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} (e^{x-2} + 1) + \left(\frac{2x-3}{x-1} \right) e^{x-2}$

$f'(x) = \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x-3}{x-1} \right] e^{x-2} + \frac{1}{(x-1)^2}$

(0.5ن) $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

(0.25ن) ومنه: متزايدة تماما على $\mathbb{R} - \{1\}$. $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2} > 0$

(0.5ن) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$+\infty$ 		$+\infty$ 

(0.25ن) (3) $(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2) = 3x - 4$

(0.25ن) (0.25ن) $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ ، $f(0) = 3(e^{-2} + 1) \approx 3.40$

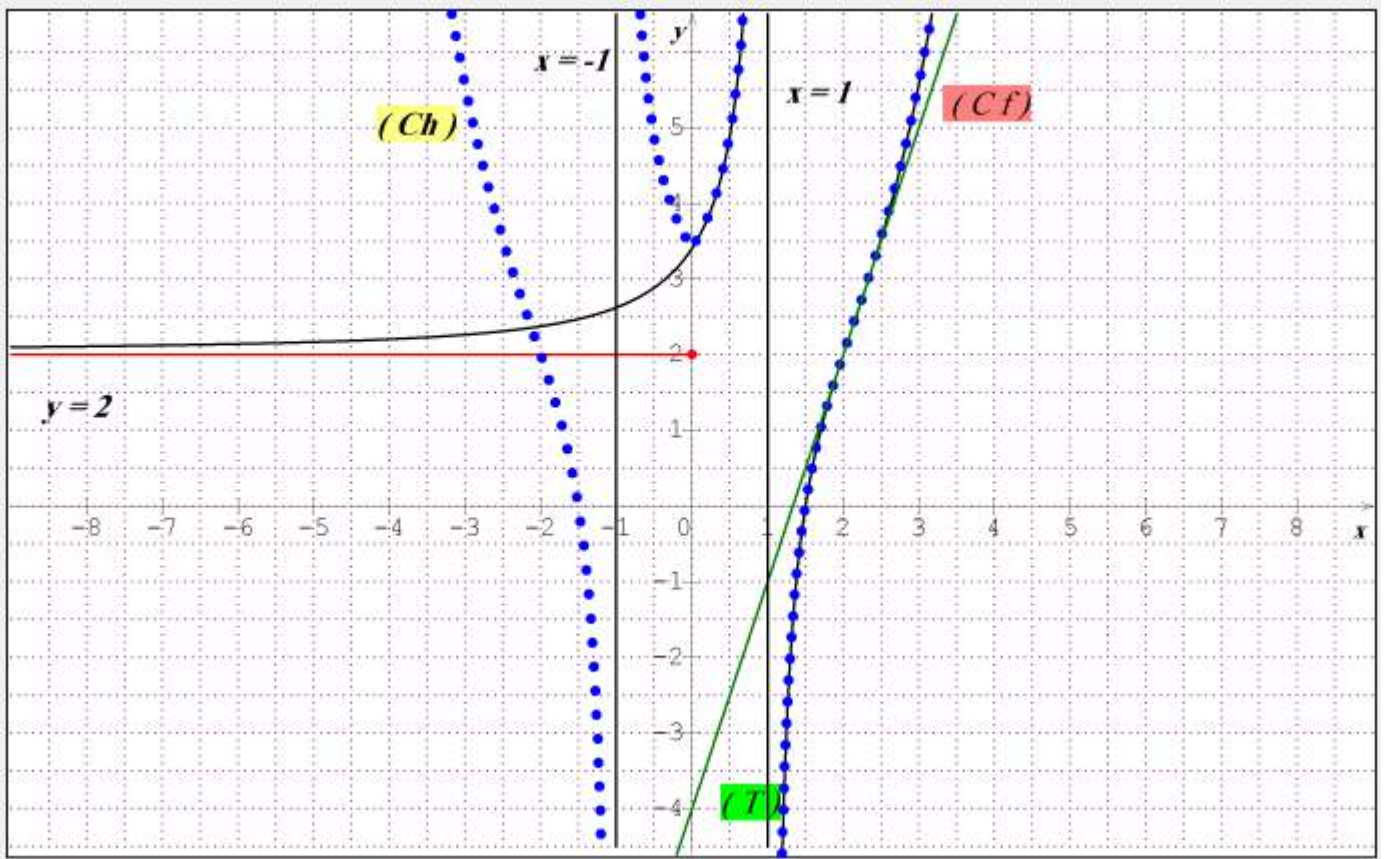
(0.25ن) (III) - من أجل كل x من D_h : $h(-x) = h(x)$ (لأن $|-x| = |x|$) ومنه : الدالة h دالة زوجية.

(2) - على المجال $[0, 1[\cup]1, +\infty[$: $h(x) = f(x)$ ومنه (C_h) يطابق (C_f) .

على المجال $]-\infty, -1[\cup]-1, 0]$ بما ان الدالة h دالة زوجية فإن يقبل محور الترتيب كمحور تناظر :

نرسم نظير الجزء السابق بالنسبة ل (yy')

(3) - إنشاء (T) ، (C_f) و (C_h) : (0.75ن)



الموضوع الثاني :

التمرين الأول (04 نقاط) :

(0.25ن) $D_{119} = \{1, 7, 17, 119\}$ ، $119 = 7 \times 17$ - (1 - I

(2 - نضع : $a = 17a'$ ، $b = 17b'$ حيث : $PGCD(a', b') = 1$

لدينا : $m = \frac{a \times b}{d}$ حيث : $d = PGCD(a, b)$ ، $m = PPCM(a, b)$ ومنه :

$$\begin{cases} a'b' = 119 \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 17a'b' = 2023 \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases}$$

a'	1	119	7	17
b'	119	1	17	7

(1.25ن) $S = \{(17, 2023); (2023, 17); (119, 289); (289, 119)\}$

(0.25ن) $PGCD(289, 34) = 17$ ، ومنه : $119 = 7 \times 17$ ، $34 = 2 \times 17$ - (1 - II

ومنه : المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$ (0.25ن)

2- المعادلة (E) تكافئ : $17x - 2y = 119$ $17x - 2y = 119$ معناه $2y = 17x - 199$

$2y = 17(x - 7)$ لكن 2 و 17 أوليان فيما بينهما و منه حسب مبرهنة غوص :

$17/y$ أي أن : y مضاعف 17 (0.5ن)

$y = 17k$ ($k \in \mathbb{Z}$) ، نعوض y بما يساويه في المعادلة (E) نجد : $y = 17k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

..... $S = \{(2k + 7, 17k); (k \in \mathbb{Z})\}$ (0.5ن)

3- $x^2 - y \leq 52$ يكافئ : $4k^2 + 28k + 49 - 17k \leq 52$ ، $4k^2 + 11k - 3 \leq 0$.

$k \in \{-3, -2, -1, 0\}$ ومنه $k_2 = \frac{1}{4}$ ، $k_1 = -3$ ، $\Delta = 169$.

..... $S' = \{(1, -51); (3, -34); (5, -17); (7, 0)\}$ (0.5ن)

III - n عدد طبيعي فردي معناه : $n \equiv 1[2]$ ، باقي قسمته على 17 هو 16 معناه : $n \equiv 16[17]$

$\begin{cases} 17n \equiv 17[34] \\ 2n \equiv 32[34] \end{cases}$ ، $15n \equiv -15[34]$ ، $n \equiv -1[34]$ ، $n \equiv 33[34]$ و منه :

..... باقي قسمة n على 34 هو 33 . (0.5ن)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1- عدد الحالات الممكنة للسحب : $C_{12}^2 = 66$

2ذهبية $\leftarrow 40$ ، 1 ذهبية + 1 فضية $\leftarrow 30$ ، 1 ذهبية + 1 برونزية $\leftarrow 10$ ، 2 فضية $\leftarrow 20$ ، 1 فضية + 1 برونزية $\leftarrow 0$.

..... $x_i \in \{, 10, 20, 30, 40\}$ (0.5ن)

(0.25ن)(0.25ن) $P(X = 10) = \frac{C_1^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{7}{66}$ ، $P(X = 0) = \frac{C_1^1 \times C_4^1}{C_{12}^2} = \frac{4}{66} = \frac{2}{33}$

(0.25ن)(0.25ن) $P(X = 30) = \frac{C_4^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$ ، $P(X = 20) = \frac{C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$

..... $P(X = 40) = \frac{C_7^2}{C_{12}^2} = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}$ (0.25ن)

x_i	0	10	20	30	40
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{33}$	$\frac{7}{66}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{7}{22}$

(0.25ن) $E(X) = \frac{85}{3}$ ، $E(X) = 0 \times \frac{2}{33} + 10 \times \frac{7}{66} + 20 \times \frac{1}{11} + 30 \times \frac{14}{33} + 40 \times \frac{7}{22}$

(2)- عدد الحالات الممكنة : $C_{38}^3 = 8436$.

(0.5ن) $P(A) = \frac{C_{18}^3}{C_{38}^3} = \frac{816}{8436} = \frac{68}{703}$

(0.5ن) $P(B) = \frac{C_{18}^1 \times C_{20}^2}{C_{38}^3} = \frac{3420}{8436} = \frac{15}{37}$

(0.5ن) $P(C) = \frac{C_2^1 \times C_{36}^2 + C_2^2 \times C_{36}^1}{C_{38}^3} = \frac{1296}{8436} = \frac{108}{703}$

(0.5ن) $P(D) = \frac{C_{19}^3}{C_{37}^3} = \frac{969}{8436} = \frac{17}{148}$

التمرين الثالث: (05 نقاط) :

(0.25ن) $U_{n+1} = \frac{9U_n + 72 - 70}{U_n + 8} = \frac{9U_n + 2}{U_n + 8} : \mathbb{N}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $I - (1 - I)$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $I - (1 - I)$

(ب-) $0 \leq U_n \leq 2 \dots\dots P(n)$

من أجل $n = 0$: $0 \leq \frac{1}{2} \leq 2$ و منه : $P(0)$ محققة

نفرض صحة $P(n)$ معناه $0 \leq U_n \leq 2$ ، نبهن على صحة $P(n+1)$ معناه : $0 \leq U_{n+1} \leq 2$

$$\frac{-70}{8} \leq \frac{-70}{U_n + 8} \leq \frac{-70}{10} , \frac{1}{10} \leq \frac{1}{U_n + 8} \leq \frac{1}{8} , 8 \leq U_n + 8 \leq 10 , 0 \leq U_n \leq 2$$

و منه : $0 \leq U_{n+1} \leq 2$ ومنه : $P(n+1)$ محققة .

(0.5ن) ومنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq 2$ حسب مبدأ البرهان بالتراجع .

(ج-) من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = \frac{9U_n + 2}{U_n + 8} - U_n = \frac{-U_n^2 + U_n + 2}{U_n + 8} = \frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{U_n + 8}$

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq 2$ ومنه : $U_n + 8 > 0$ ، $U_n + 1 > 0$ ، $U_{n+1} - U_n \geq 0$ أي أن :

(0.5ن) (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

(0.25ن) (هـ) - (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأعلى بـ 2 فهي متقاربة

$$2 - U_{n+1} = 2 - \frac{9U_n + 2}{U_n + 8} = \frac{2U_n + 16 - 9U_n - 2}{U_n + 8} = \frac{7(2 - U_n)}{U_n + 8} : \mathbb{N} \text{ من أجل كل } n \text{ من } (2) - (أ)$$

(0.5ن) $2 - U_{n+1} \leq \frac{7}{8}(2 - U_n)$: ومنه $\frac{7}{U_n + 8} \leq \frac{7}{8}$ ، $\frac{1}{U_n + 8} \leq \frac{1}{8}$ ، $U_n + 8 \geq 8$ ، $U_n \geq 0$

(بـ)

$$2 - U_1 \leq \frac{7}{8}(2 - U_0)$$

$$2 - U_2 \leq \frac{7}{8}(2 - U_1)$$

⋮

⋮

$$2 - U_n \leq \frac{7}{8}(2 - U_{n-1})$$

$$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n (2 - U_0)$$

(0.5ن) ومنه : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 2 - U_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n$

(0.25ن) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$: ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{9U_n + 2}{U_n + 8} - 2}{\frac{9U_n + 2}{U_n + 8} + 1} = \frac{9U_n + 2 - 2U_n - 16}{9U_n + 2 + U_n + 8} = \frac{7(U_n + 2)}{10(U_n + 2)} : \mathbb{N} \text{ من أجل كل } n \text{ من } (1) - (II)$$

(0.5ن) $V_0 = \frac{\frac{1}{2} - 2}{\frac{1}{2} + 1} = -1$: وحدها الأول $q = \frac{7}{10}$ متتالية هندسية أساسها (V_n) ومنه $V_{n+1} = \frac{7}{10}V_n$

(2-) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $V_n = V_0 \times q^n = -\left(\frac{7}{10}\right)^n$ (0.25ن)

$$U_n (V_n - 1) = -V_n - 2, V_n \times U_n - U_n = -V_n - 2, V_n (U_n + 1) = U_n - 2, V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$$

(0.5ن) $U_n = \frac{V_n + 2}{1 - V_n} = \frac{-\left(\frac{7}{10}\right)^n + 2}{1 + \left(\frac{7}{10}\right)^n}$

(3-) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ و منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$ (0.25ن)(0.25ن)

(4-) لدينا : $U_n = \frac{V_n + 2}{1 - V_n}$ ، $U_n (1 - V_n) = V_n + 2$ ، $U_n (V_n - 1) = -V_n - 2 = \left(\frac{7}{10}\right)^n - 2$ ، $10^n U_n (V_n - 1) = 7^n - 2 \times 10^n$
 $S_n = \frac{1}{1-7} (1 - 7^{n+1}) - \frac{2}{1-10} (1 - 10^{n+1})$ ، ومنه :

(0.5ن) $S_n = \frac{7^{n+1} - 1}{6} - \frac{2(10^{n+1} - 1)}{9}$

التعريف الرابع (02 نقاط)

$$2Ln(\sqrt{a}) = Lna : \text{و منه} \begin{cases} Ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = Ln(\sqrt{a}) + Ln(\sqrt{a}) = 2Ln(\sqrt{a}) \\ Ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = Lna \end{cases} \quad -(I)$$

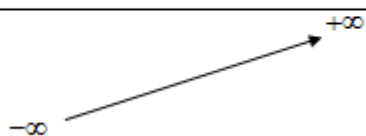
أي أن : $Ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} Lna$ (0.25ن)

(II-) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$ (0.25ن)(0.25ن)

(2-) g قابلة للإشتقاق على D_g : $g'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2e}}{\frac{x-1}{2e}} \right) = \frac{1}{2(x-1)} > 0$ (0.25ن)

ومنه : الدالة متزايدة ماما على D_g (0.25ن)

جدول تغيرات الدالة g : (0.25ن)

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		

(0.25ن) $g(3) = \ln \sqrt{\frac{2}{2e}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{e} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ - (3)

إشارة $g(x)$: (0.25ن)

x	0	3	$+\infty$
$g(x)$: إشارة	-	○	+

(0.25ن) (0.25ن) ومنه: f غير قابلة للإشتقاق عند 1 من اليمين.. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \sqrt{\frac{x-1}{2e}} = -\infty$ - (1-III)

(0.25ن) $W(1,0)$ يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة (C_f) -

(0.25ن) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ - (2)

(0.25ن) $f'(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{2e} \right) + \frac{1}{x-1} \times \frac{x-1}{2} = g(x)$: $]1, +\infty[$ قابلة للإشتقاق على المجال - (3)

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]1, +\infty[$:

(0.25ن) $]3, +\infty[$: f متزايدة تماما على المجال ، $] -\infty, 3[$: f متناقصة تماما على المجال

جدول تغيرات الدالة f : (0.5ن)

x	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

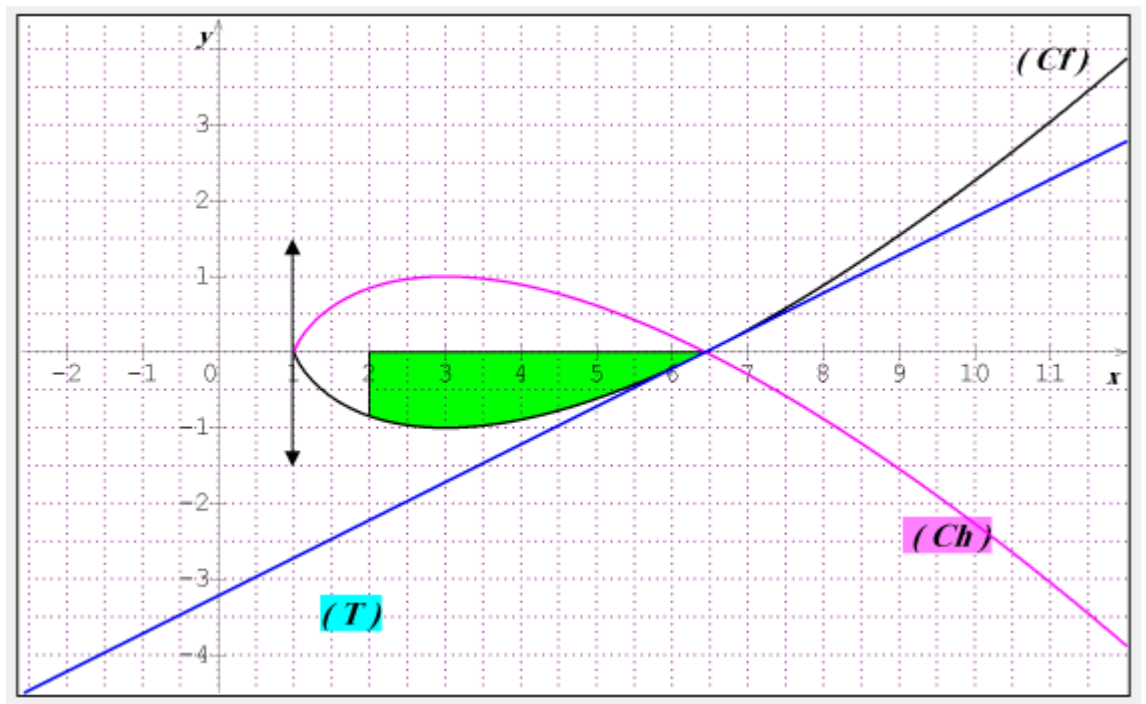
$$Ln\sqrt{\frac{x-1}{2e}} = 0 \quad \text{أو} \quad x-1=0 \quad \text{معناه} \quad (x-1)Ln\sqrt{\frac{x-1}{2e}} = 0 \quad \text{أو} \quad (4)$$

$$\cdot \quad x = 1 + 2e, \quad \frac{x-1}{2e} = 1, \quad \frac{1}{2}Ln\left(\frac{x-1}{2e}\right) = 0, \quad Ln\sqrt{\frac{x-1}{2e}} = 0 \quad \text{أو} \quad x = 1$$

(0.25ن) بما أن $\alpha > 1$ فإن $\alpha = 1 + 2e$

$$(0.25ن) (T) : y = f'(1+2e)(x-1-2e) + f(1+2e) = \frac{1}{2}x - e - \frac{1}{2} \quad \text{بـ}$$

(0.75ن) (جـ) - إنشاء (T) ، (C_f) و (C_h) :



(0.25ن) 5- (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لـ (xx') على المجال $[1, +\infty[$.

$$(0.25ن) 6- \quad x-1 - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)(x-1)-1}{x-1} = \frac{x^2-2x+1-1}{x-1} = \frac{x^2-2x}{x-1} \quad \text{أو} \quad (6)$$

$$\int_2^a \frac{x^2-2x}{x-1} dx = \int_2^a \left[x-1 - \frac{1}{x-1} \right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - x - Ln(x-1) \right]_2^a$$

$$(0.25ن) \int_2^a \frac{x^2-2x}{x-1} dx = 2e^2 - \frac{3}{2} - Ln 2$$

$$\begin{aligned}
 U'(x) &= \frac{x-1}{2} & U(x) &= \frac{x^2 - 2x}{4} \\
 V(x) &= \ln\left(\frac{x-1}{2e}\right) & V'(x) &= \frac{1}{x-1}
 \end{aligned}
 \quad \text{---}(\rightarrow)$$

$$\int_2^a f(x) dx = \left[\left(\frac{x^2 - 2x}{4} \right) \ln\left(\frac{x-1}{2e}\right) \right]_2^a - \frac{1}{4} \int_2^a \frac{x^2 - 2x}{x-1} dx$$

$$S = -\int_2^a f(x) dx = \frac{1}{4} \left(2e^2 - \frac{3}{2} - \ln 2 \right) \quad \int_2^a f(x) dx = -\frac{1}{4} \left(2e^2 - \frac{3}{2} - \ln 2 \right)$$

(ن0.75) $S \approx 3.146 \text{ cm}^2$

(ن0.25) $S' = \int_2^a g(x) - f(x) dx = -2 \int_2^a f(x) dx \approx 6.292 \text{ cm}^2$ ---($\rightarrow$)

