

اختبار

الفصل الثاني



تمرين 1 (5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = e - (e - u_n)^2$.

(1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n \leq e$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = (e - u_n)(1 - e + u_n)$.

ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة، وأنّها متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e - u_{n+1} \leq (e - 2)(e - u_n)$.

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq (e - u_n) \leq (e - 2)^{n+1}$ ، ثم تأكّد من $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ الموجودة سابقا.

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول v_0 ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = n(e - u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = n(e - 2)^{2^n}$.

ب) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq v_n \leq n(e - 2)^n$.

سؤال إضافي: بيّن أنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. يمكن وضع $t = n \ln(e - 2)$.

تمرين 2 (4 نقاط)

كيس يحتوي على 10 قريصات، تحمل كل قريصة حرف من كلمة "الاحتمالات" (4 قريصات تحمل حرف الألف، قريصتان

تحملان حرف اللام، قريصتان تحملان حرف التاء، قريصة واحدة تحمل حرف الحاء، وقريصة واحدة تحمل حرف الميم).

نسحب عشوائيا من هذا الكيس وبلا اختيار أربع قريصات في آن واحد.

(1) احسب احتمال سحب أربع قريصات تحمل كل حروف كلمة "حتما".

(2) احسب احتمال سحب أربع قريصات لا تحمل حرف الألف.

(3) احسب احتمال سحب قريصة واحدة تحمل حرف الألف على الأقل.

(4) احسب احتمال سحب قريصة واحدة فقط تحمل حرف الألف علما أنّ أحرف القريصات المسحوبة مختلفة مثنى مثنى.

(5) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب، عدد القريصات التي تحمل حرف الألف.

عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، واحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

(6) نسحب الآن من هذا الكيس على التوالي دون إرجاع أربع قريصات.

أ) احسب احتمال سحب أربع قريصات تحمل حروف كلمة "تلال" على الترتيب.

ب) احسب عدد الحالات الممكنة لسحب أربع قريصات تحمل حرفين فقط، الألف واللام.

(في كل التمرين، تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

تمرين 3 (4 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1 المنحني $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x - \frac{e^x}{e^x - 1}$ له مستقيم مقارب مائل معادلته:	$y = x$	$y = x + 1$	$y = x - 1$
2 الدالة الأصلية للدالة g المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{\ln(2x-2)}{x-1}$ والتي تنعدم عند $\frac{3}{2}$ هي:	$\frac{[\ln(2x-2)]^2}{2}$	$\frac{[\ln(2x-2)]^2}{2} + 1$	$[\ln(2x-2)]^2$
3 المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ و $5u_{n+1} = 2u_n$ أصغر قيمة للعدد n التي تحقق $u_n \leq 10^{-6}$ هي:	14	15	16
4 في المجموعة $\mathbb{R}$ ، المعادلة $x + 1 + \ln(e^x + 1) = 0$: (لا يُطلب حل هذه المعادلة)	تقبل حلين	تقبل حلا وحيدا	لا تقبل حولا

تمرين 4 (7 نقاط)

I- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{-5x+1}{x(x+1)} + \ln(x+1) - \ln x$.

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، وبيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. فسّر بيانيا النتيجة.

(2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{(x-1)(4x+1)}{x^2(x+1)^2}$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,3 < \alpha < 0,4$.

ب) فسّر بيانيا العدد الحقيقي α ، ثم أنشئ التمثيل البياني $(\mathcal{C}_f)$.

4) m وسيط حقيقي موجب تماما، و g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = (x-5)\ln(x+1) - (x-1)\ln(mx)$.

بيّن أنّ $g'(x) = 0$ تكافئ $f(x) = \ln m$ ، ثم ناقش بيانيا، حسب قيم m ، عدد المماسات لـ $(\mathcal{C}_g)$ الموازية لحامل محور الفواصل.

II- h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

(1) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ $\int_1^2 h(x) dx = 3\ln 3 - 4\ln 2$.

(2) تحقق أنّه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f(x) = h(x) - h'(x) - \frac{5}{x+1}$. استنتج حساب $\int_1^2 f(x) dx$.

(3) احسب مساحة الجوّز $\mathcal{A}$ المحدّد بـ $(\mathcal{C}_f)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتهما $x = 1$ و $x = 2$.

III- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n = h(n) - h'(n)$.

(1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > 0$.

(2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، ثم استنتج أنّها متقاربة.

(3) أ) تحقق أنّ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = \ln(n+1) - \ln(n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

ب) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. بيّن أنّ $S_n = \frac{n}{n+1} + \ln(n+1)$.

تصحيح اختبار الفصل الثاني 2023 م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

$n=0$: $\mu_0 = 2$ ، ومنه $2 \leq \mu_0 \leq e$ (محققة)
نفرض أن $2 \leq \mu_n \leq e$ من أجل n كفي ونبرهن
صحة $2 \leq \mu_{n+1} \leq e$ ، لدينا $2 \leq \mu_n \leq e$ ،

$-e \leq -\mu_n \leq -2$; $0 \leq e - \mu_n \leq e - 2$;
 $-(e-2)^2 \leq -(e-\mu_n)^2 \leq 0$; $0 \leq (e-\mu_n)^2 \leq (e-2)^2$
 $2 \leq e - (e-2)^2 \leq e - (e-\mu_n)^2 \leq e$ (محققة)
ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $2 \leq \mu_n \leq e$

ب) $\mu_{n+1} - \mu_n = e - (e - \mu_n)^2 - \mu_n = e - \mu_n - (e - \mu_n)^2$
ومنه $\mu_{n+1} - \mu_n = (e - \mu_n)(1 - e + \mu_n)$

ج) لدينا : $2 \leq \mu_n \leq e$; $2 - e \leq -e + \mu_n \leq 0$;
 $0 \leq e - \mu_n \leq e - 2$; وسابقا : $0 \leq 1 - e + \mu_n \leq 1$
إذن : $\mu_{n+1} - \mu_n \geq 0$ ، ومنه (μ_n) متزايدة.

(μ_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{n+1} = l$;
 $l = e - (e - l)^2$ ، $2 \leq l \leq e$ لأن $2 \leq \mu_n \leq e$ ، ومنه $(e - l)(1 - e + l) = 0$

2) P لدينا : $0 \leq e - \mu_n \leq e - 2$ ، نضرب في $(e - \mu_n)$ نجد :
 $(e - \mu_n)^2 \leq (e - 2)(e - \mu_n)$ (محققة)
ب) لدينا : $e - \mu_n \geq 0$ ، محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$
نبرهن بالتراجع على : $e - \mu_n \leq (e - 2)^{n+1}$.

$n=0$: $e - \mu_0 = e - 2$ ، و $e - 2 \leq (e - 2)^1$ (محققة)
نفرض أن $e - \mu_n \leq (e - 2)^{n+1}$ من أجل n كفي،
ونبرهن $e - \mu_{n+1} \leq (e - 2)^{n+2}$ ، لدينا :

$e - \mu_n \leq (e - 2)^{n+1}$ ، نضرب في $(e - 2)$:
 $(e - 2)(e - \mu_n) \leq (e - 2)^{n+2}$ ، ولدينا :

$e - \mu_{n+1} \leq (e - 2)(e - \mu_n)$ ، ومنه $e - \mu_{n+1} \leq (e - 2)^{n+2}$
ومنه : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $e - \mu_n \leq (e - 2)^{n+1}$.

بما أن : $0 \leq e - 2 \leq 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e - 2)^{n+1} = 0$
باستعمال مبرهنة الحصر : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e - \mu_n) = 0$

ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = e$

3) P $V_n = n(e - 2)^{2^n}$ يعني : $(e - \mu_n) = (e - 2)^{2^n}$
 $n=0$: $(e - \mu_0) = (e - 2)^1$ ، محققة لأن $\mu_0 = 2$.

نفرض أن $(e - \mu_n) = (e - 2)^{2^n}$ من أجل n كفي
ونبرهن صحة : $(e - \mu_{n+1}) = (e - 2)^{2^{n+1}}$ ،
لدينا : $(e - \mu_n) = (e - 2)^{2^n}$ ، بتربيع الطرفين :

$(e - \mu_n)^2 = ((e - 2)^{2^n})^2 = (e - 2)^{2 \cdot 2^n} = (e - 2)^{2^{n+1}}$
محققة : $(e - \mu_n)^2 = (e - 2)^{2^{n+1}}$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(e - \mu_n) = (e - 2)^{2^n}$

ب) $2^n \geq n$ ، ومنه : $(e - 2)^{2^n} \leq (e - 2)^n$ ، لأن $0 \leq e - 2 \leq 1$ ، في الأخير : $0 \leq n(e - 2)^{2^n} \leq n(e - 2)^n$

المسؤول الإضافي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e - 2)^n = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t e^t}{\ln(e - 2)} = 0$
لأن $t = \ln(e - 2)^n$ أي $e^t = (e - 2)^n$ (مبرهنة الحصر) ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

تمرين 2:

$$P_1 = \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1 \times C_4^1}{C_{10}^4} = \frac{4}{105} \quad (1)$$

$$P_2 = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14} \quad (2)$$

$$P_3 = 1 - P_2 = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14} \quad (3)$$

4) A : سحب قرصية واحدة تحمل حرف الألف
B : سحب 4 قرصيات تحمل حروفا مختلفة مثلثي

ANB : أ ت ل ح | أ ت ل م | أ ح م ت | أ ح م ل |
B : أ ت ل ح | أ ت ل م | أ ح م ت | أ ح م ل |

$$P(ANB) = \frac{C_4^1 (2C_2^1 C_2^1 C_1^1 + 2C_1^1 C_1^1 C_2^1)}{C_{10}^4} = \frac{8}{35}$$

$$P(B) = \frac{C_4^1 (2C_2^1 C_2^1 C_1^1 + 2C_1^1 C_1^1 C_2^1) + C_1^1 C_1^1 C_1^1 C_1^1}{C_{10}^4} = \frac{26}{105}$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(ANB)}{P(B)} = \frac{12}{13}$$

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (5)$$

$$P(X=0) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^3}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 \cdot C_6^1}{C_{10}^4} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

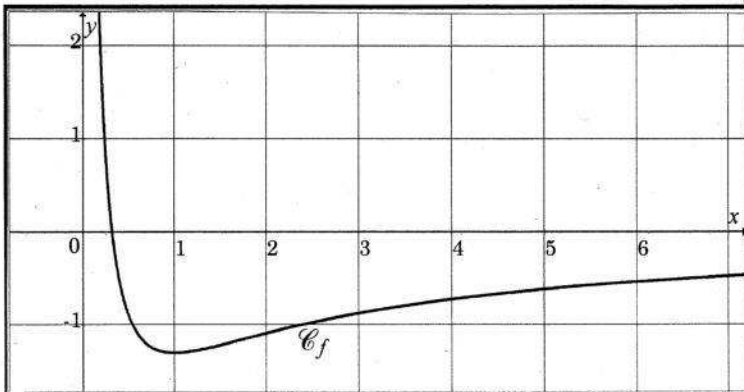
$$E(X) = 0 + \frac{8}{21} + \frac{6}{7} + \frac{12}{35} + \frac{4}{210} = \frac{8}{5}$$

$$P_4 = \frac{A_2^1 \cdot A_2^1 \cdot A_4^1 \cdot A_1^1}{A_{10}^4} = \frac{1}{315} \quad (6)$$

ب) 2 و 3 أو 1 و 3 أو 6 و 4

$$6 \cdot A_4^2 \cdot A_2^2 + 4 \cdot A_4^3 \cdot A_2^1 = 336$$





(4) g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

$$g'(x) = \frac{-5x+1}{x(x+1)} + \ln(x+1) - \ln x - \ln m = f(x) - \ln m$$

محاسن يوارزي $(x'0k)$ أي $g'(x) = 0$ أي $f(x) = \ln m$

حل هذه المعادلة هي خواصل نقاط تقاطع $y = \ln m$ و $y = f(x)$.
 لا يوجد محاسن $m < 2e^{-2}$ أي $\ln m < -2 + \ln 2$
 يوجد محاسن $m = 2e^{-2}$ أي $\ln m = -2 + \ln 2$
 يوجد محاسن $2e^{-2} < m < 1$ أي $-2 + \ln 2 < \ln m < 0$
 يوجد محاسن $m \geq 1$ أي $\ln m \geq 0$

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{-1}{x(x+1)} \\ v(x) = x \end{cases} \quad \begin{cases} u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad (1 - II)$$

$$\int_1^2 h(x) dx = \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$$

$$\int_1^2 h(x) dx = \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln(x+1) \right]_1^2 = 3 \ln 3 - 4 \ln 2$$

$$h(x) - h'(x) = \frac{5}{x+1} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{x(x+1)} - \frac{5}{x+1} \quad (2)$$

$$= \ln(x+1) - \ln x + \frac{-5x+1}{x(x+1)} = f(x)$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 h(x) dx - \int_1^2 h'(x) dx - \int_1^2 \frac{5}{x+1} dx$$

$$= 3 \ln 3 - 4 \ln 2 - [h(x)]_1^2 - 5 [\ln(x+1)]_1^2 = 3 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$A = \int_1^2 -f(x) dx = 3 \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad (3) \quad \text{م.أ.}$$

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} \quad (1 - III)$$

من أجل كل $n > 0$ ، $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$ ؛ ومنه $u_n > 0$ ؛
 كذلك $\frac{1}{n(n+1)} > 0$ ؛ ومنه $u_n > 0$ ؛
 ($n \in \mathbb{N}^*$) $u_n > 0$ ؛ ومنه $u_n > 0$ ؛

(2) لنكن K الدالة المرفقة، والمعرفة على $]0; +\infty[$.

$$K'(x) = h'(x) - h''(x) \quad \text{ومنه} \quad K(x) = h(x) - h'(x)$$

$$K'(x) = -\left(\frac{1}{x(x+1)} + \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\right) < 0$$

K متناقصة تماماً على $]0; +\infty[$ ومنه (u_n) متناقصة.
 (u_n) متناقصة، ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} = \ln(n+1) - \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (P(3))$$

$$S_n = \ln 2 - \ln 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ln 4 - \ln 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \ln(n+1) - \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1} = \ln(n+1) + \frac{n}{n+1}$$

تمرين 3:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - (x-1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x - 1} = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - (x-1) \right] = 0$ ؛
 $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{2x-2} \ln(2x-2) = \frac{\ln(2x-2)}{x-1}$

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{5} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ؛
 $u_n = u_0 \cdot q^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ، $q = \frac{2}{5}$ أساساً

$$\log\left(\frac{2}{5}\right)^n \geq \log 10^6 \quad ; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^n \geq 10^6 \quad ; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 10^{-6}$$

$$n \log \frac{2}{5} \geq 6 \quad ; \quad n \geq 15,08 \quad ; \quad n = 16 \quad \text{ومنه}$$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ ؛
 $h(x) = x + 1 + \ln(x^2 + 1)$ ؛
 $h'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} > 0$ متزايدة تماماً؛
 $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً على $\mathbb{R}$.

تمرين 4:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (1 - I)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-5x+1}{x(x+1)} = +\infty$$

المتغير (x) يقبل مستقيماً مقارباً معادلتها $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{5}{x} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right] = 0$$

$y=0$ يقبل مستقيماً مقارباً معادلتها $y=0$.

(2) f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{-5(x^2+x) - (2x+1)(-5x+1)}{x^2(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{5x^2 - 2x - 1 + x^2(x+1) - x(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 3x - 1}{x^2(x+1)^2} = \frac{(x-1)(4x+1)}{x^2(x+1)^2}$$

(ب) $4x+1 > 0$ ؛ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x-1$.

$x > 1$ ؛ $f'(x) > 0$ ؛ f متزايدة تماماً.

$0 < x < 1$ ؛ $f'(x) < 0$ ؛ f متناقصة تماماً.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-2 + \ln 2$	0

(3) f مستمرة ومتناقصة تماماً على $]0; 1[$ ؛

$$f(0.4) = -0.53 < 0 \quad ; \quad f(0.3) = 0.18 > 0$$

ميرمنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ ؛

تقبل حلاً وحيداً α في $]0; 1[$ حيث $0.3 < \alpha < 0.4$ ؛

نقطة تقاطع (C_f) مع $y=0$ ؛