

المدة: 2 ساعة

الاختبار الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (06ن)

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامة

1. أنشئ النقط E ، F و G حيث: E مرجح الجملة المثقلة $\{(B,3);(C,1)\}$ ، F معرفة كمايلي:

$$\vec{AF} = \frac{1}{4}\vec{AC} \text{ و } G \text{ منتصف القطعة } [AB]$$

2. عين العددين الحقيقيين α و β حيث F مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(C,\beta)\}$

3. لتكن النقطة I مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,3);(C,1)\}$

- بين أن النقط A ، I و E على استقامة واحدة

$$4. \text{ عين ثم أنشئ مجموعة النقط } M \text{ التي تحقق: } \left\| 3\vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC} \right\| = 7 \left\| \vec{MI} - \vec{MB} \right\|$$

$$5. \text{ عين ثم أنشئ مجموعة النقط } M \text{ التي تحقق: } \left\| 3\vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC} \right\| = \frac{7}{4} \left\| 3\vec{MB} + \vec{MC} \right\|$$

التمرين الثاني (06ن) :

يحتوي كيس على ثلاث كرات بيضاء مرقمة كمايلي 0، 1، 1 وثلاث كرات حمراء مرقمة ب 1، 2، 2 وكرتين سوداوين مرقمتان 2، 0 كل الكريات متماثلة لا نفرق بينهم باللمس.

نسحب بصفة عشوائية كرتين على التوالي **دون إرجاع**.

1. شكل شجرة الاحتمالات:

أ- باعتبار اللون ب- باعتبار الرقم.

2. أحسب احتمال الأحداث التالية:

A: "سحب كرتين من نفس اللون" B: "ظهور الرقم 1 مرة واحدة فقط"

C: "ظهور الرقم 2" D: الكرية المسحوبة ثانيا حمراء

3. أحسب $P(A \cap B)$ ثم استنتج $P(\overline{A \cup B})$.

4. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية للسحب مجموع الأرقام المسحوبة.

أ- عين قيم المتغير العشوائي X .

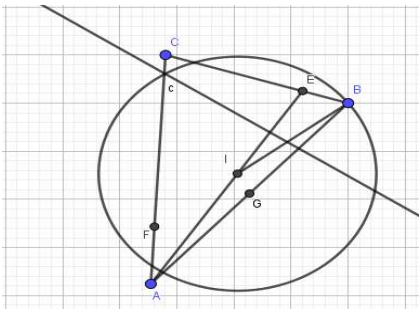
ب- عين قانون احتمال المتغير العشوائي ثم أحسب أمله الرياضي.

$$5. \text{ أحسب } P\left(\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 0\right)$$

التمرين الثالث (08ن):

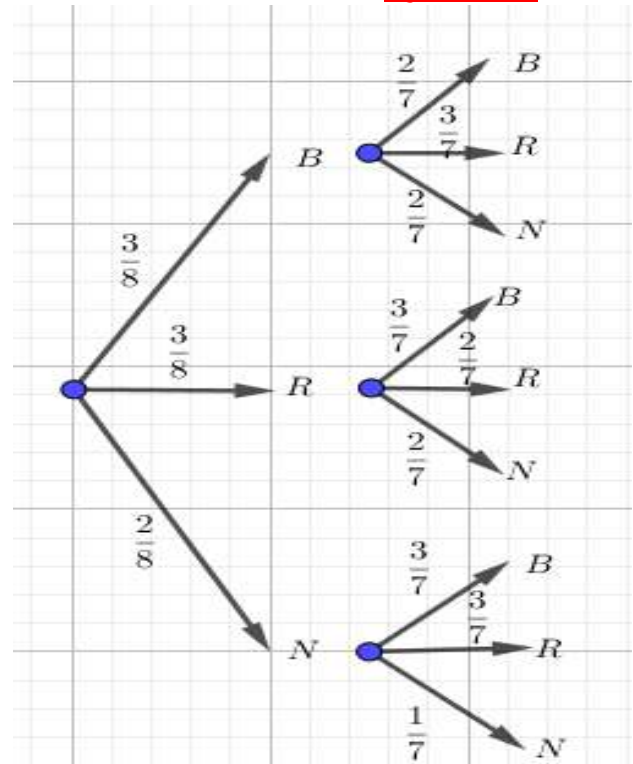
١. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 3x + 4$
١. أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة التعريف.
 ٢. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 ٣. أحسب $g(-1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
٢. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{-x^3 + 2}{x^2 + 1}$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
١. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 ٢. أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$.
 - ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.
 ٣. أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + \frac{x+2}{x^2 + 1}$.
 - ب- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً (Δ) يطلب تعيين معادلته.
 - ج- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
 ٤. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين موازيين للمستقيم (Δ) .
 ٥. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
 ٦. أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .
 ٧. ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = m$.

مع تمنيات أستاذتي المادة لكم بالتوفيق

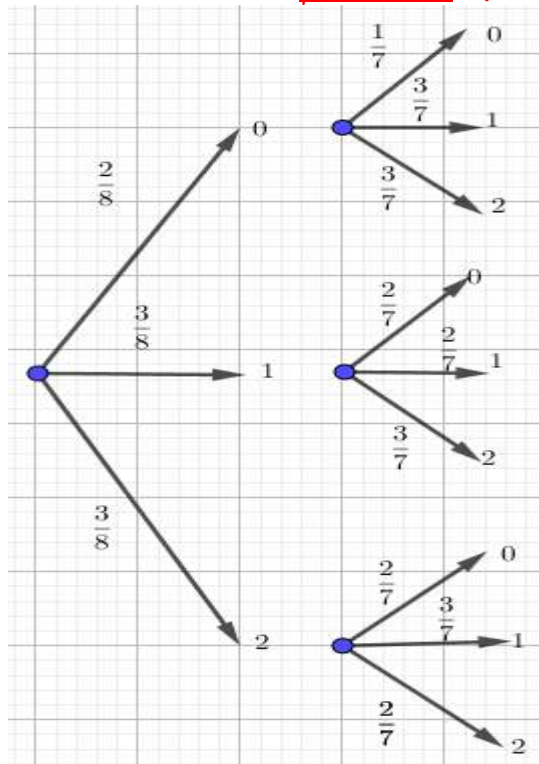
العلامة	الاجابة
	التمرين الأول:
0.25:G	1. انشاء النقط E ، F و G
0.5:E	- $\vec{AF} = \frac{1}{4} \vec{AC}$
0.25:F	- G منتصف [AB]
0.5:I	- $\vec{BE} = \frac{1}{4} \vec{AC}$
	
	2. عين العددين الحقيقيين α و β حيث F مرجح الجملة المثقلة $\{(A, \alpha); (C, \beta)\}$
0.25	لدينا: $\vec{AF} = \frac{1}{4} \vec{AC}$ ومنه: $4\vec{AF} = \vec{AC}$ ومنه: $\vec{AC} - 4\vec{AF} = \vec{0}$ ومنه: $\vec{AF} + \vec{FC} - 4\vec{AF} = \vec{0}$
0.75+	ومنه: $3\vec{FA} + \vec{FC} = \vec{0}$ إذا: F مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 3); (C, 1)\}$
	3. تبين أن النقط A ، I و E على استقامة واحدة
	لدينا I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 3); (B, 3); (C, 1)\}$ و E مرجح الجملة المثقلة $\{(B, 3); (C, 1)\}$
0.5	إذا حسب خاصية التجميع: I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 3); (E, 4)\}$ ومنه: $\vec{AI} = \frac{4}{7} \vec{AE}$
0.5	الشعاعان $\vec{AI}$ و $\vec{AE}$ مرتبطان خطيا وعليه النقط A ، I و E على استقامة واحدة
	4. عين ثم أنشئ مجموعة النقط M التي تحقق: $\ 3\vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC}\ = 7\ \vec{MI} - \vec{MB}\$
0.75	لدينا: $\ 3\vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC}\ = 7\ \vec{MI} - \vec{MB}\ $ ومنه: $\ 7\vec{MI}\ = 7\ \vec{MI} - \vec{MI} - \vec{IB}\ $
0.5	ومنه: $MI = IB$ إذا مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها IB
0.5	5. عين ثم أنشئ مجموعة النقط M التي تحقق: $\ 3\vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC}\ = \frac{7}{4}\ 3\vec{MB} + \vec{MC}\$
0.75	لدينا: $\ 3\vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC}\ = \frac{7}{4}\ 3\vec{MB} + \vec{MC}\ $ ومنه: $\ 7\vec{MI}\ = \frac{7}{4}\ 4\vec{ME}\ $ ومنه: $7MI = 7ME$
0.5+	ومنه: $MI = ME$
للإنشاء	إذا مجموعة النقط M هي محور القطة المستقيمة [IE]

1. شجرة الاحتمالات:

أ- باعتبار اللون



ب- باعتبار الرقم



2. حساب احتمال الأحداث التالية:

$$P(B) = \frac{2}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{30}{56} \quad , \quad P(A) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{14}{56}$$

$$P(D) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{21}{56} \quad , \quad P(C) = \frac{2}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{36}{56}$$

3. حساب $P(A \cap B)$ ثم استنتاج $P(\overline{A \cup B})$.

$A \cap B$: "سحب كرتين من نفس اللون وظهور الرقم 1 مرة واحدة"

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{8} = \frac{8}{56} \quad , \quad A \cap B = \{B_0B_1; B_1B_0; R_1R_2; R_2R_1\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{14}{56} + \frac{30}{56} - \frac{8}{56} = \frac{36}{56} \quad \text{لدينا: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{ومنه:}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{36}{56} = \frac{20}{56} \quad \text{ولدينا: } P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \quad \text{ومنه:}$$

4. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية للسحب مجموع الأرقام المسحوبة.

أ- عين قيم المتغير العشوائي X .

$$X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

ت- تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي وحساب أمله الرياضي.

$$P(X=1) = \frac{2}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{12}{56}, \quad P(X=0) = \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{56}$$

$$P(X=3) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{18}{56}, \quad P(X=2) = \frac{2}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{18}{56}$$

$$P(X=4) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56} \text{ إذا:}$$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{56}$	$\frac{12}{56}$	$\frac{18}{56}$	$\frac{18}{56}$	$\frac{6}{56}$

0.25ن

4 ×

0.25ن

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{56} + 1 \times \frac{12}{56} + 2 \times \frac{18}{56} + 3 \times \frac{18}{56} + 4 \times \frac{6}{56} = \frac{126}{56}$$

$$P\left(\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 0\right) \text{ 5. أحسب}$$

$$\text{لدينا: } \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 0 \text{ تكافئ: } \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} x(x^2 - 3x + 2) = 0 \\ x \neq 1; x \neq -1 \end{cases}$$

0.25ن

$$\text{ومنه: } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ أو } \Delta = 1 \text{ ومنه: } x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ مرفوض،}$$

0.25ن

$$P\left(\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 0\right) = P(X=0) + P(X=2) = \frac{2}{56} + \frac{18}{56} = \frac{20}{56} \text{ إذا:}$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 3x + 4$

1. حساب نهايات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

2. دراسة تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و: $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

0.25ن ×

2

0.25ن

0.25

0.25

0.25

3. حساب $g(-1)$ ، ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

$$g(-1) = (-1)^3 + 3(-1) + 4 = 0$$

0.25

من جدول التغيرات نجد:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$		$-$	$+$

- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{-x^3 + 2}{x^2 + 1}$

2×0.25

1. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

2. أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$.

0.25

الدالة f قابلة للاشتقاق على مجالها و:

$$f'(x) = \frac{-3x^2(x^2 + 1) - 2x(-x^3 + 2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^4 - 3x^2 + 2x^4 - 4x}{(x^2 + 1)^2}$$

0.25

$$f'(x) = \frac{-x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x(x^3 + 3x + 4)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-xg(x)}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{ومنه:}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها:

لدينا: إشارة $f'(x)$ من إشارة $-xg(x)$ ومنه:

0.5

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$-x$	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$

0.25

إذا: الدالة f متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[0; +\infty[$ ومتزايدة على المجال $[-1; 0]$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$3/2$	2	$-\infty$

0.25

3. أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + \frac{x+2}{x^2 + 1}$.

0.25

$$-x + \frac{x+2}{x^2 + 1} = \frac{-x(x^2 + 1) + x + 2}{x^2 + 1} = \frac{-x^3 - x + x + 2}{x^2 + 1} = \frac{-x^3 + 2}{x^2 + 1} = f(x)$$

ب- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً (Δ) يطلب تعيين معادلته.

0.5

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2 + 1} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ث- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

$$f(x) - y = \frac{x+2}{x^2+1} \quad \text{دراسة إشارة الفرق:}$$

إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة البسط ومنه:

0.5ن

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	تحت (C_f) (Δ)	تقاطع	فوق (C_f) (Δ)

0.25ن

4. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين موازيين للمستقيم (Δ) .

$$f'(x) = -1 \quad \text{تكافئ:} \quad \frac{-x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2+1)^2} = -1 \quad \text{ومنه:} \quad \frac{-x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2+1)^2} + 1 = 0$$

0.25ن

$$\text{ومنه:} \quad \frac{-x^4 - 3x^2 - 4x + x^4 + 2x^2 + 1}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \text{ومنه:} \quad \frac{-x^2 - 4x + 1}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \text{تكافئ:} \quad -x^2 - 4x + 1 = 0$$

0.25ن

$$\text{ومنه:} \quad \Delta = 20 \quad \text{إذا:} \quad x_1 = \sqrt{5} - 2, \quad x_2 = -2 - \sqrt{5}$$

ومنه: (C_f) يقبل مماسين موازيين للمستقيم (Δ) عند النقطتين ذات الفاصلتين $x_1 = \sqrt{5} - 2$ و

0.5ن

$x_2 = -2 - \sqrt{5}$ على الترتيب.

5. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

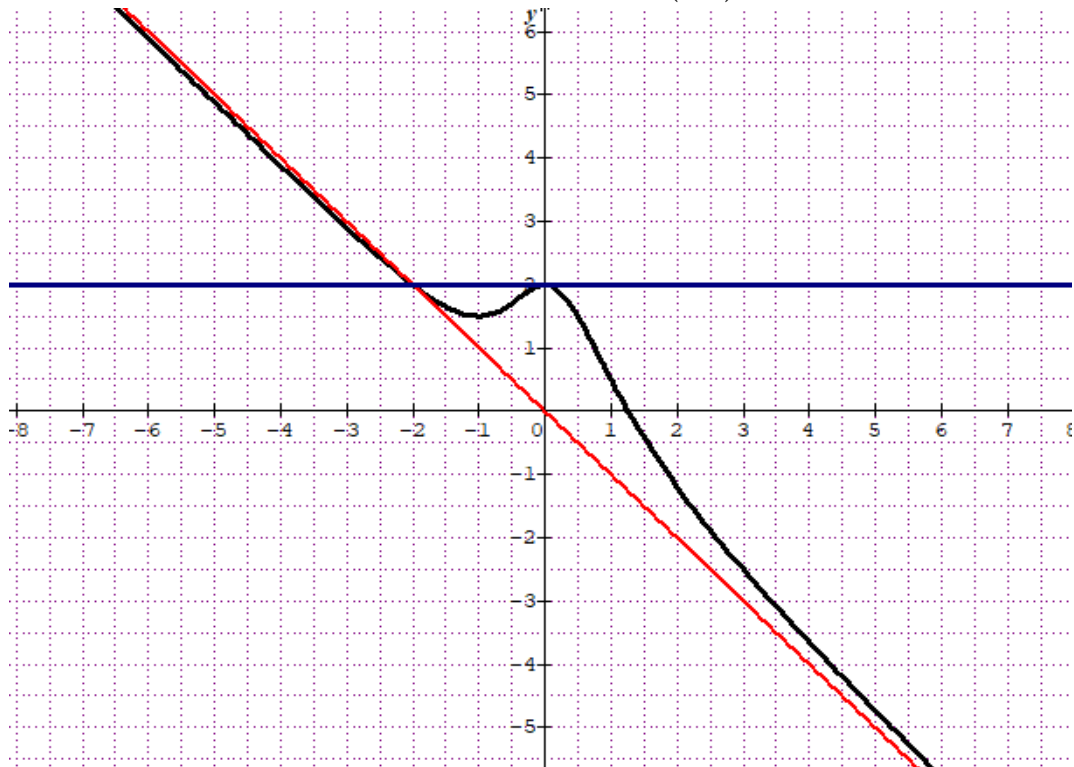
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{ومنه:} \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad \text{ومنه:} \quad y = 2$$

6. رسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

0.25

0.25+

0.5+



7. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = m$.

حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي:
 $y = m$ معادلة له.

0.75ن

$m \in]-\infty; \frac{3}{2}[$: المعادلة تقبل حلا واحد موجبا ، $m = \frac{3}{2}$: المعادلة تقبل حل موجب وحل سالب

$m \in]\frac{3}{2}; 2[$: المعادلة تقبل حلين سالب و حل موجب ،

$m = 2$: المعادلة تقبل حل معدوم وحل سالب

$m \in]2; +\infty[$: المعادلة تقبل حل واحد سالب.