

المدة: 2 سا

التمرين الثالث [10 نقاط]

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x + x + 1$$

- 1 ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها
- 2 بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1.28; -1.27[$
- 3 استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = (x + 2)(1 - e^{-x})$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

2

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)e^{-x}$

ب/ استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3 عيّن دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا

4

أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

5

أ/ أثبت أنه يوجد مماس (T) وحيد لـ (C_f) يوازي (Δ)

ب/ تحقق أن معادلة المماس (T) هي: $y_{(T)} = x + 2 - e$

6

أ/ بيّن أن $f(\alpha) = \frac{(\alpha + 2)^2}{\alpha + 1}$ ، ثم جد حصرًا للعدد $f(\alpha)$

ب/ جد نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات

ج/ مثل بيانيا كل من (Δ) ، (T) و (C_f)

7 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة:

$$\frac{m - 2}{x + 2} = -e^{-x}$$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = (|x| + 2)(e^{-|x|} - 1)$$

1 بيّن أن الدالة h زوجية

2 اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) منحنى الدالة h إنطلاقًا من (C_f) ، ثم أنشئه

تأمل معي ... مرّ شهرين ونصف منذ الدخول المدرسي.... ماذا تنتظرون؟

يقول نابليون بونابرت:

"أحسن وسيلة للتغلب على الصعاب، اختراقها"

✓ إنتهى

تصحيح مقترح لاختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

الأستاذ: قويسم ابراهيم الخليل

المستوى: **ثالثة ثانوي** - **شعبة علوم تجريبية**

التمرين الأول [03 نقاط]

[01ن] **① خطأ، لأن**

$$\begin{aligned}\ln^2 x - \ln x^2 = 0 &\Rightarrow (\ln x)^2 - 2 \ln x = 0 \\ &\Rightarrow \ln x (\ln x - 2) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \text{أو} \\ \ln x - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ \ln x = 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = e^2 \end{cases}\end{aligned}$$

إذن $S = \{1; e^2\}$ [01ن] **② خطأ، لأن**

لدينا:

$$\begin{aligned}y' + y \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow y' = -y \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\ \Rightarrow y' &= y \ln(2) - \ln(4) \\ \Rightarrow y &= ce^{x \ln 2} - \frac{\ln 4}{\ln 2} \\ \Rightarrow y &= ce^{\ln 2^x} + \frac{2 \ln 2}{\ln 2} \\ \Rightarrow y &= c2^x + 2\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}f(2) = 6 &\Rightarrow c2^2 + 2 = 6 \\ &\Rightarrow 4c = 4 \\ &\Rightarrow c = 1\end{aligned}$$

إذن: $f(x) = 2^x - 2$ [01ن] **③ صحيح ، لأن**

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (-x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(1 + e^{-x}) + x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(e^{-x}(e^x + 1)) + x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(e^{-x}) + \ln(e^x + 1) + x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + \ln(e^x + 1) + x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(e^x + 1)] \\ &= \ln 1 = 0\end{aligned}$$

إذن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = -x$ بجوار $-\infty$

التمرين الثاني [07 نقاط]

[01ن]

① حساب $f'(x)$ بدلالة a, b و c ،

$$\begin{aligned} f'(x) &= a \ln^2 x + b \ln x + c + x \left(2a \frac{1}{x} \ln x + \frac{b}{x} \right) \\ &= a \ln^2 x + b \ln x + c + 2a \ln x + b \\ &= a \ln^2 x + (2a + b) \ln x + b + c \end{aligned}$$

[03ن]

② بقراءة بيانيتة تعيين $f'(e)$ ، $f'(\sqrt{e})$ و $f(e)$ ،

$$\begin{aligned} \bullet f'(\sqrt{e}) &= 0 \\ \bullet f(e) &= e \\ \bullet f'(e) &= \frac{e-0}{e-\frac{e}{2}} = \frac{e}{\frac{1}{2}e} = 2 \end{aligned}$$

[03ن]

③ تبين أن: $f(x) = x(2 \ln^2 x - 3 \ln x + 2)$ ،

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(\sqrt{e}) = 0 &\Rightarrow f'\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 0 \\ &\Rightarrow a \left(\ln e^{\frac{1}{2}}\right)^2 + (2a + b) \ln e^{\frac{1}{2}} + b + c = 0 \\ &\Rightarrow a \left(\frac{1}{2} \ln e\right)^2 + (2a + b) \frac{1}{2} \ln e + b + c = 0 \\ &\Rightarrow \frac{a}{4} + a + \frac{b}{2} + b + c = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{5a + 6b + 4c = 0} \dots (01) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(e) = e &\Rightarrow e(a \ln^2 e + b \ln e + c) = e \\ &\Rightarrow \boxed{a + b + c = 1} \dots (02) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(e) = 2 &\Rightarrow a(\ln e)^2 + (2a + b) \ln e + b + c = 2 \\ &\Rightarrow a + 2a + b + b + c = 2 \\ &\Rightarrow \boxed{3a + 2b + c = 2} \dots (03) \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{cases} 5a + 6b + 4c = 0 \dots (01) \\ a + b + c = 1 \dots (02) \\ 3a + 2b + c = 2 \dots (03) \end{cases}$$

ب طرح (03) من (02) نجد:

$$2a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 2a \dots (04)$$

نعوض قيمة (04) في كل من (01) و (02) نجد:

$$\begin{cases} 5a + 6(1 - 2a) + 4c = 0 \\ a + 1 - 2a + c = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} 7a - 4c = 6 \dots (05) \\ -7a + 7c = 0 \dots (06) \end{cases}$$

ب جمع (05) و (06) نجد:

$$3c = 6 \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

نعوض قيمة c في (06) نجد: $-7a + 14 = 0$

إذن: $\boxed{a = 2}$

نعوض قيمة a في (04) نجد: $\boxed{b = -3}$

التمرين الثالث [10 نقاط]

(I)

[0.1ن]

1 دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$f'(x) = e^x + 1 > 0$$

لدينا: $f'(x) > 0$

إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

[0.5ن]

2 تبين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

• لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-1.28; -1.27[$

• ولدينا: $g(-1.28) \times g(-1.27) < 0$

$$\begin{cases} g(-1.28) \approx -0.001 \\ g(-1.27) = 0.01 \end{cases} \quad \text{لأن}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$

تقبل حل وحيدا α في المجال $]-1.28; -1.27[$

[0.5ن]

3 استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

[0.5ن]

1 حساب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\underbrace{(x+2)}_{-\infty} \underbrace{(1-e^{-x})}_{-\infty} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{(x+2)}_{+\infty} \underbrace{(1-e^{-x})}_1 \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

2

[0.75ن]

1/ تبين أن: $f'(x) = g(x)e^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - e^{-x} - (-e^{-x})(x+2) \\ &= 1 - e^{-x} + xe^{-x} + 2e^{-x} \\ &= 1 + e^{-x} + xe^{-x} \\ &= (e^x + 1 + x)e^{-x} \\ &= g(x)e^{-x} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغيرات الدالة f :

لدينا: $e^{-x} > 0$

[0.75ن]

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3 تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right) &= f'(\alpha) \\ &= g(\alpha)e^{-\alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

[0.25ن]

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة ذات الفاصل α معادلته $y = f(\alpha)$

[0.25ن]

4

1/ تبين أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)(1-e^{-x}) - (x+2)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)(1-e^{-x}-1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-x}(x+2)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{-xe^{-x}}_0 - 2e^{-x} \right] \end{aligned}$$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} = 0 &\Rightarrow -e^{-x}(x+2) = 0 \\ &\Rightarrow -(x+2) = 0 \\ &\Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

[0.5ن]

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-2; 0)$	(C_f) تحت (Δ)

5

1/ اثبات أنه يوجد مماس (C_f) يوازي (Δ) :

يوجد مماس وحيد يوازي (Δ) معناه يوجد عدد حقيقي وحيد a يحقق:

$$f'(a) = 1$$

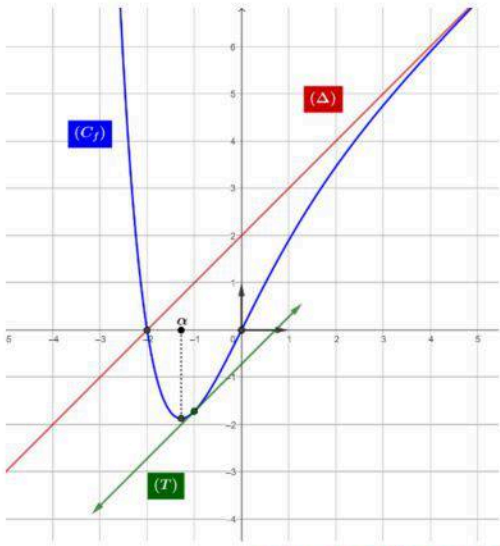
$$f'(a) = 1 \Rightarrow e^{-a}(e^a + a + 1) = 1$$

$$\Rightarrow e^a + a + 1 = e^a$$

$$\Rightarrow a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = -1$$

[0.5ن]



7 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{m-2}{x+2} &= -e^{-x} \Rightarrow m-2 = -e^{-x}(x+2) \\ &\Rightarrow m = -e^{-x}(x+2) + 2 \\ &\Rightarrow m+x \\ &= -e^{-x}(x+2) + 2 + x \\ &\Rightarrow m+x \\ &= (x+2)(1-e^{-x}) \\ &\Rightarrow m+x = f(x) \dots (E) \end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل تقاطع (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة $y_m = x + m$

وهي:

- لما $m < 2 - e$ (E) لا تقبل حلول
- لما $m = 2 - e$ (E) تقبل حل وحيد
- لما $2 - e < m < 2$
- تقبل حلين متميزين (E)
- لما $m \geq 2$ (E) تقبل حل وحيد

(III)

1 تبين أن الدالة h زوجية:

لدينا: $D_h = \mathbb{R}$ لأن $(-x) \in D_h$ ، ولدينا:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

إذن الدالة h زوجية

1 شرح كيف يمكن إنشاء (C_h) :

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(|x|) \\ &= \begin{cases} f(x) & ; x > 0 \\ f(-x) & ; x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$ (C_h) ينطبق على (C_f) ، وبما أن الدالة h زوجية، فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.

اذن يوجد مماس (T) وحيد لـ (C_f) يوازي (Δ) عند الفاصلتة -1

ب/ التحقق أن $y_{(T)} = x + 2 - e$

$$\begin{aligned} y_{(T)} &= f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \\ &= x + 1 + 1 - e \\ &= x + 2 - e \end{aligned}$$

6

أ/ تبين أن $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$

لدينا: $g(\alpha) = 0$

ومنه: $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$

إذن: $e^\alpha = -(\alpha + 1)$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (\alpha + 2)(1 - e^{-\alpha}) \\ &= (\alpha + 2)\left(1 - \frac{1}{e^\alpha}\right) \\ &= (\alpha + 2)\left(1 - \frac{1}{-(\alpha + 1)}\right) \\ &= (\alpha + 2)\left(\frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}\right) \\ &= \frac{(\alpha + 2)^2}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $-1.28 < \alpha < -1.27$

ولدينا: $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$

ومنه: $-1.97 < f(\alpha) < -1.85$

ب/ إيجاد تقاطع (C_f) مع المحورين:

- مع حامل محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x + 2)(1 - e^{-x}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \text{أو} \\ 1 - e^{-x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{أو} \\ x = 0 \end{cases}$$

إذن: $(C_f) \cap (xx') = \{(-2; 0); (0; 0)\}$

- مع حامل محور الترتيب:

$$f(0) = 0$$

إذن: $(C_f) \cap (yy') = \{0\}$

ج/ التمثيل البياني:

[0.75ن]

[0.5ن]

[0.5ن]

[0.5ن]

[0.25ن]

[0.5ن]

[0.5ن]

[0.5ن]