



جانفي 2021

المستوى: الثالثة ثانوي تسيير و اقتصاد

المدة: 1 سا

الفرض الثاني للثلاثي الأول في الرياضيات

**تمارين:**

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$ .

1) احسب الحدود  $u_1, u_2, u_3$ .

2) أبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:  $u_n < 2$ .

3) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = u_n - 2$ .

أبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

بداكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ .

جما هي نهاية المتتالية  $(u_n)$ ؟

4) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  واستنتج أنه من أجل كل عدد

طبيعي  $n$  فإن:  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$ .

بالتوفيق

الأستاذ زوبير عبد الرحيم

## التصحيح النموذجي

الحل :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4} \end{cases} \text{ لدينا: } (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة بـ } u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$$

1) حساب الحدود  $u_1, u_2, u_3$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3}{4}u_0 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}(1) + \frac{2}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4} \\ u_2 &= \frac{3}{4}u_1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{2}{4} = \frac{15+8}{16} = \frac{23}{16} \\ u_3 &= \frac{3}{4}u_2 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{23}{16}\right) + \frac{2}{4} = \frac{69+32}{64} = \frac{101}{64} \end{aligned}$$

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_n < 2$ :

نسمي هذه الخاصية بـ  $P(n)$   
 المرحلة 01: من أجل  $n = 0$   
 لدينا:  $u_0 = 1 < 2$  إذن:  $P(0)$  صحيحة.  
 المرحلة 02:

- نفرض صحة الخاصية  $P(n)$  أي:  $u_n < 2$  (فرضية التراجع)
- ونبرهن صحة الخاصية  $P(n+1)$  أي:  $u_{n+1} < 2$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا:  $u_n < 2$   
 ومنه:  $\frac{3}{4}u_n < \frac{6}{4}$   
 وعليه:  $\frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4} < \frac{6}{4} + \frac{2}{4}$   
 أي:  $u_{n+1} < 2$

وبالتالي:  $P(n+1)$  صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $u_n < 2$ .

3) لدينا:  $(v_n)$  متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = u_n - 2$ .

لتبيان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية نطلب تحديد أساسها وحدها الأول:

نكتب  $v_{n+1}$  بدلالة  $v_n$ .

لدينا:  $v_n = u_n - 2$  ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4} - 2 = \frac{3}{4}u_n - \frac{6}{4} = \frac{3}{4}u_n - \frac{3 \times 2}{4} = \frac{3}{4}(u_n - 2) = \frac{3}{4}v_n$$

أي:  $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

إذن:  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{3}{4}$  وحدها الأول  $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$ .

بكتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ :

لدينا:  $v_n = v_0 \times q^n$  ومنه:  $v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$  :

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 2 \text{ إذن: } u_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2$$

حساب نهاية المتتالية  $(u_n)$  :

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ لأن } -1 < \frac{3}{4} < 1 \text{، إذن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

4) حساب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث،  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  :

$$\text{لدينا: } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left( \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{3}{4}} \right) = - \left( \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} \right)$$

$$\text{ومنه: } S_n = -4 \left( 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right) = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن،  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$  :

$$\text{لدينا: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$$

$$\text{ومنه: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 2(n - 0 + 1)$$

$$\text{وعليه: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = S_n + 2n + 2 = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 + 2n + 2 = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$$