

⬢ التمرين الأول [05 نقاط]

لكل سؤال إجابة واحد من ثلاث إجابات مقترحة، اختر الجواب الصحيح مع التبرير.

① إذا كان منحنى الدالة f يقبل مماسا معادلته: $x = 2$ فإن:

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = 1$ (ب) $\lim_{h \rightarrow 2} \left(\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \right) = 0$ (ج) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = +\infty$

② حلول المعادلة التفاضلية: $y' - \sqrt{2}y = 1$ هي حلول الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

(i) $f: x \mapsto ce^{\sqrt{2}x} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ب) $f: x \mapsto ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - 1$ (ج) $f: x \mapsto ce^{\frac{1}{\sqrt{2}}x} + 1$

③ حلول المترابطة: $2 \ln(x - 1) > 1$ هي:

(i) $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ (ب) $]1; +\infty[$ (ج) $]e; +\infty[$

④ f دالة موجبة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = 0$ ، لدينا:

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(f(x))) = 1$ (ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(f(x)))$ غير موجودة (ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(f(x))) = -\infty$

⑤ إذا كان $f(x) = \ln \left(\frac{g(x)}{h(x)} \right)$ ، فإن:

(i) $f' = \frac{g' \cdot h + h' \cdot g}{h^2}$ (ب) $f' = \frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{g \cdot h}$ (ج) $f' = \frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{h^2}$

⬢ التمرين الثاني [04 نقاط]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$$

① احسب u_1, u_2 و u_3 .

② نضع من أجل كل عدد n : $v_n = u_n - 2n + 6$.

أ/ احسب v_0, v_1 و v_2 .

ب/ اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها.

ج/ اكتب عبارة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

④ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = 2x - 7 + 2e^x$$

① ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② اثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 1$.

③ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

① ادرس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

② احسب نهايتي الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

③ أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) معادلته $y = 2x - 5$ بجوار $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

④ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = g(x) \cdot e^{-x}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

⑤ أ/ بين أن الدالة h المعرفة على المجال $I =]-\infty; \frac{5}{2}]$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$$

متزايدة تماما على I .

ب/ بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$$

ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

⑥ مثل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحني (C_f) .

⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث:

$$f(x) = -2m \dots (E)$$

التمرين الأول [05 نقاط]

السؤال	الجواب الصحيح	التبرير
إذا كان منحني الدالة f يقبل مماسا معادلته: $x = 2$ فإن:	$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = +\infty$ (0.25 ن)	لما $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \pm \infty$ الدالة f تقبل مماسا عموديا معادلته $x = a$ (0.5 ن)
حلول المعادلة التفاضلية: $y = \sqrt{2}y' - 1$ هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:	$f: x \mapsto ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - 1$ (0.25 ن)	الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو $c \in \mathbb{R}$ حيث: $x \mapsto y(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}$ (0.5 ن) ولدينا: $y = \sqrt{2}y' - 1 \Rightarrow y' = \frac{y + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (0.5 ن) اذن حلول المعادلة التفاضلية هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f: x \mapsto ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - 1$ (0.5 ن)
حلول المتراجحة: $2 \ln(x - 1) > 1$	$]\sqrt{e} + 1; +\infty[$ (0.25 ن)	لدينا: $2 \ln(x - 1) > 1 \Rightarrow \ln(x - 1) > \frac{1}{2}$ (0.5 ن) $\Rightarrow x - 1 > e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x > \sqrt{e} + 1$ ومنه مجموعة الحلول هي: $x \in]\sqrt{e} + 1; +\infty[$
f دالة موجبة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(f(x))] = -\infty$ (0.25 ن)	نضع: $u(x) = \ln x$ و $v(x) = (u \circ f)(x) = \ln(f(x))$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(f(x))] = \lim_{x \rightarrow 0} [u(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln x] = -\infty$ (0.5 ن)
إذا كان: $f(x) = \ln \left(\frac{g(x)}{h(x)} \right)$ فإن:	$f' = \frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{g \cdot h}$ (0.25 ن)	$f' = \frac{\left(\frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{h^2} \right)}{\frac{g}{h}} = \frac{\left(\frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{h} \right)}{g}$ (0.5 ن) $= \frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{g \cdot h}$

التمرين الثاني [04 نقاط]

① حساب u_1, u_2 و u_3 :

$$u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{2}$$

$$u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{4}$$

$$u_{2+1} = \frac{1}{2}u_2 + 2 - 1 \Rightarrow u_3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right) + 1 \Rightarrow u_3 = \frac{7}{8}$$

(0.5 ن)

/أ حساب v_2, v_1, v_0 :

$$v_0 = u_0 - 2(0) + 6 \Rightarrow v_0 = 7$$

$$v_1 = u_1 - 2(1) + 6 \Rightarrow v_1 = \frac{7}{2}$$

$$v_2 = u_2 - 2(2) + 6 \Rightarrow v_2 = \frac{7}{4}$$

ب/ اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 6 = \frac{1}{2}u_n + n - 1 - 2n - 2 + 6 = \frac{1}{2}u_n - n + 3 = \frac{1}{2}(u_n - 2n + 6) = \frac{1}{2}v_n$$

ولدينا: $v_0 = 7$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول 7.ج/ كتابة عبارة (v_n) بدلالة n :

$$v_n = 7 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

$$v_n = u_n - 2n + 6 \Rightarrow u_n = v_n + 2n - 6 \Rightarrow u_n = 7 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(7 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6 \right) = +\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

④ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

لدينا:

$$u_n = v_n + 2n - 6 = v_n + w_n$$

حيث (w_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول -6

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ = v_0 + 2(0) - 6 + v_1 + 2(1) - 6 + \dots + v_n + 2n - 6$$

$$w_n = 2n - 6$$

نلاحظ أن w_n عبارة متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول -6 ومنه:

$$S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (w_0 + w_1 + \dots + w_n)$$

$$= 7 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) + (n+1) \frac{(2n - 6 - 6)}{2}$$

$$= 7 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) + (n+1) \frac{(2n - 12)}{2}$$

$$= 14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) + (n+1)(n-6)$$

1ن

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها:

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x - 7 + 2e^x] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - 7 + 2e^x] = +\infty \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 2 + 2e^x > 0$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

② اثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 1$

لدينا: الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(0.5) \cong -2.7$ و $g(1) \cong 0.43$

ولدينا: $g(1) \times g(0.5) < 0$

ومنه فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.5; 1[$.

③ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

① دراسة إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (2x - 5)(1 - e^{-x}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 5 = 0 \\ 1 - e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 5 \\ e^{-x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

ومنه:

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x - 5$	-	-	0	+
$1 - e^{-x}$	+	0	-	-
$f(x)$	-	0	+	-

② حساب نهايتي الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2x - 5)(1 - e^{-x})] = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - 5)(1 - e^{-x})] = +\infty \end{aligned}$$

③ أ/ تبين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) معادلته $y = 2x - 5$ بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - 5)(1 - e^{-x}) - (2x - 5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - 5)(1 - e^{-x} - 1)] \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-x}(2x - 5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [5e^{-x} - 2xe^{-x}] = 0 - 0 = 0 \quad (0.5 \text{ ن})$$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow -e^{-x}(2x - 5) = 0 \Rightarrow e^{-x}(-2x + 5) = 0 \Rightarrow -2x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \quad (0.25 \text{ ن})$$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

(0.25 ن)

الوضعية:

(0.25 ن)

• لما $x \in]-\infty; \frac{5}{2}[$ المنحني (C_f) فوق (D).

• لما $x = \frac{5}{2}$ المنحني (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الإحداثيات $(\frac{5}{2}; 0)$

• لما $x \in]\frac{5}{2}; +\infty[$ المنحني (C_f) تحت (D).

④ أ/ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = g(x) \cdot e^{-x}$

$$f'(x) = 2(1 - e^{-x}) + e^{-x}(2x - 5) = 2 - 2e^{-x} + 2xe^{-x} - 5e^{-x} = -7e^{-x} + 2xe^{-x} + 2 \\ = e^{-x}(-7 + 2x + 2e^x) = e^{-x} \cdot g(x) \quad (0.5 \text{ ن})$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(0.25 ن)

(0.25 ن)

⑤ أ/ تبين أن الدالة h المعرفة على المجال $I =]-\infty; \frac{5}{2}]$ كما يلي: $h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ متزايدة تماما على I .

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(2)(2x-5)(2x-7) - 2(2x-5)^2}{(2x-7)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2(2x-5)(2(2x-7) - 2x + 5)}{(2x-7)^2} = 0 \\ \Rightarrow \frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2} = 0$$

لما: $x \in I$

لدينا $(2x-7)^2 > 0$ و $(2x-5) > 0$ و $(2x-9) > 0$ إذن: $h'(x) > 0$ ومنه الدالة h متزايدة تماما على I .

(0.5 ن)

ب/ تبين أن $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

لدينا

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow -7 + 2\alpha + 2e^\alpha = 0 \Rightarrow e^\alpha = \frac{7-2\alpha}{2} \Rightarrow e^{-\alpha} = \frac{2}{7-2\alpha} \quad (0.25 \text{ ن})$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = (2\alpha-5)(1 - e^{-\alpha}) = (2\alpha-5) \left(1 - \frac{2}{7-2\alpha}\right) = (2\alpha-5) \left(\frac{7-2\alpha-2}{7-2\alpha}\right) = -(2\alpha-5) \left(\frac{2\alpha-5}{7-2\alpha}\right) \\ = -\frac{(2\alpha-5)^2}{7-2\alpha} = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7} = h(\alpha) \quad (0.25 \text{ ن})$$

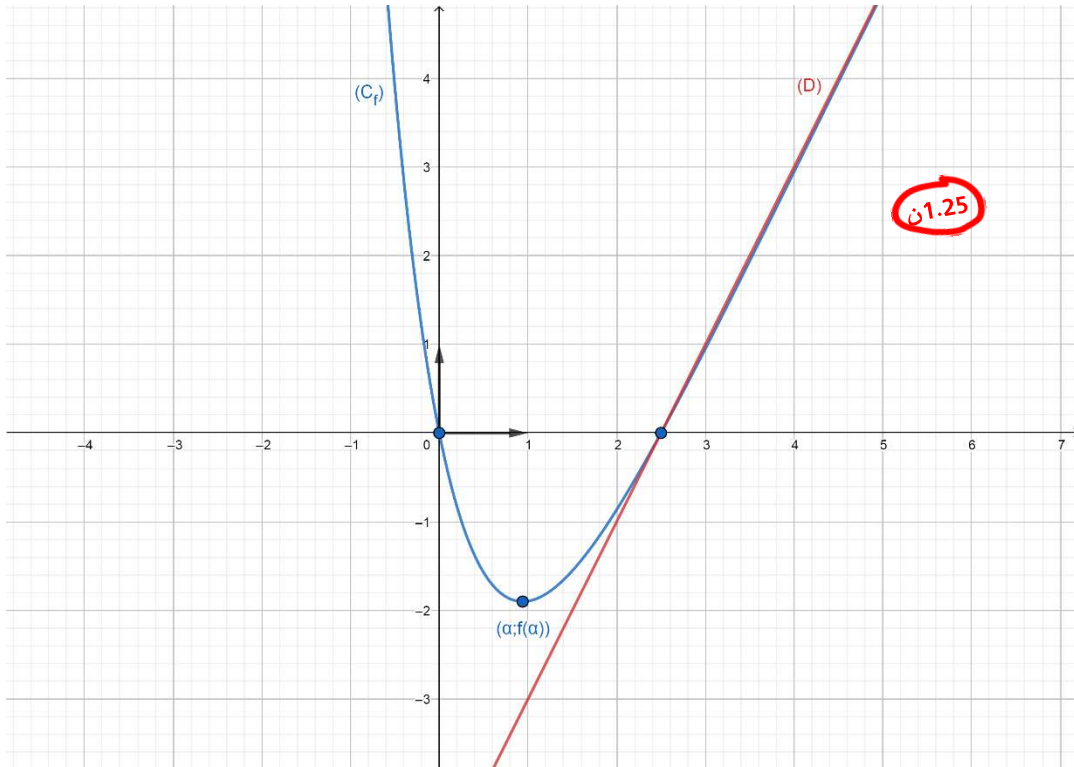
- حصر $f(\alpha)$:

0.5 ن

بما أن الدالة h متزايدة تماماً لدينا:

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1 \Rightarrow h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1) \Rightarrow -\frac{8}{3} < h(\alpha) < -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{8}{3} < f(\alpha) < -\frac{9}{5}$$

⑥ التمثيل بيانياً كل من المستقيم (D) والمنحني (C_f) :



⑦ المناقشة البيانية:

لما $-2m < f(\alpha)$	أي $m > -\frac{f(\alpha)}{2}$	المعادلة لا تقبل حلولاً
لما $-2m = f(\alpha)$	أي $m = -\frac{f(\alpha)}{2}$	للمعادلة حل مضاعف
لما $0 > -2m > f(\alpha)$	أي $-\frac{f(\alpha)}{2} > m > 0$	للمعادلة حلان موجبان متميزان
لما $-2m = 0$	أي $m = 0$	للمعادلة حل موجب وحل معدوم
لما $-2m > 0$	أي $m < 0$	للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

0.75 ن