

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2008

الشعبة : رياضيات

المدة : 04 ساعات و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول

تمرين 1: (5 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحتقيهما $\sqrt{3} - i$ و $\sqrt{3} + 3i$ على الترتيب.

1. أكتب العبارة المركبة للنشابه المباشر S الذي مركزه O و يحول A إلى B .
ثم عيّن زاويته ونسبته.

2. نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي: $A_0 = A$ ومن أجل كل عدد

طبيعي n ، $A_{n+1} = S(A_n)$. نرسم إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

(أ) أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 و A_1 و A_2 .

(ب) برهن أن: $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}$

(ج) عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1) .

3. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = A_0 A_1$ و $u_n = A_n A_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(أ) بيّن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدّها الأول u_0 وأساسها q .

(ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(ج) احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

تمرين 2: (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

لتكن النقط $A(0, 2, 1)$ ، $B(-1, 1, -3)$ ، $C(1, 0, -1)$.

1. أكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C وتشمل النقطة A .

2. ليكن المستقيم (D) المعروف بالتمثيل الوسيطى:

$$\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases} \text{ حيث } \lambda \text{ عدد حقيقي.}$$

(أ) اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C ويعامد المستقيم (D)

(ب) احسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D).

(ج) ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) و سطح الكرة S؟

تمرين 3: (5 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x - 21y = 78$

(1) أ- بين أن (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$ استنتج حلول المعادلة (E).

(2) أ- ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب- عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

تمرين 4: (6 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

يرمز (C) إلى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(الوحدة على المحورين 2cm).

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ وفسر النتيجة هندسياً.

- ادرس تغيرات الدالة f .

- باستعمال منحنى دالة "الجزر التربيعي"، أنشئ المنحنى (C).

- ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$.

(2) نعرف المتتالية (U_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

أ- باستعمال (D) و (C)، مثل الحدود U_0, U_1, U_2 على محور الفواصل.

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $2 \leq U_n \leq 5$ و $U_{n+1} > U_n$.

ب- استنتج أن (U_n) متقاربة. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

تمرين 1: (5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعروف كما يلي :

$$P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

(1) بين أنه إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضا.

(2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

(3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

(4) اكتب الحلول على الشكل الأسّي.

(5) لتكن A و B و C و D النقاط من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ والتي لاحقاتها على الترتيب: $1+i$ و $-1+i$ و $\frac{-m}{2} - \frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$

حيث m عدد حقيقي. عيّن m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.

تمرين 2: (4 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $U_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$

1 - احسب U_1 و U_2 و U_3 .

2 - (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة.

- استنتج عبارة U_n بدلالة n .

- احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

3 - (W_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $W_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- احسب المجموع S حيث : $S = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$.

تمرين 3: (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستقيمين (Δ) و (Δ')

المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين:

$$\text{على الترتيب .} \quad \begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1 - بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.
- 2 - M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ') .
 أ) عين إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') .
 ب) احسب الطول MN .
- 3 - عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .
- 4 - احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ماذا تلاحظ ؟

تمرين 4: (7 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ و C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 - ادرس تغيرات الدالة f .
- 2 - بين أن C_f يقبل نقطة انعطاف ω و اكتب معادلة لمماس C_f عند النقطة ω .
 - اثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى C_f .
- 3 - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+3)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$.
 - استنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما .
- 4 - بين أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77; -2,76[$.
 - احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تُدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم C_f ومستقيمي المقاربين .
- II) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$. C_g منحنى الدالة g .

- 1 - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x) = f(-x)$.
 - استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .
- 2 - أنشئ في نفس المعلم السابق C_g (دون دراسة الدالة g) .

الإجابة النموذجية وسلم التقييم

الموضوع الأول

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
المجموع	مجزأة		
05	0.5	تمرين 1: (5 نقاط) 1. المعادلة المركبة للتشابه S هي : $z' = \sqrt{3}iz$	أعداد مركبة تحويلات نقطية
	0.25×2	عناصر S : المركز O ، النسبة $k = \sqrt{3}$ ، الزاوية $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$	
	0.25×3	2- أ) إنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2	
	0.5	ب) إثبات أن : $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}$	
	0.5	نستعمل البرهان بالتراجع أو العلاقة $z_{n+1} = \sqrt{3}iz_n$ $n \in \mathbb{N}$	
	0.25×2+0.5	ج) تعيين الأعداد الطبيعية n حتى تكون النقطة A_n من المستقيم (OA_1) نجد $n = 2k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$	
	0.5	3. أ) (U_n) متتالية هندسية حذها الأول $U_0 = 4$ وأساسها $q = \sqrt{3}$	
	0.5	ب) عبارة (U_n) بدلالة n هي $U_n = 4(\sqrt{3})^n$	
05	0.5	ج) حساب المجموع : $S_n = \frac{4}{\sqrt{3}-1} [(\sqrt{3})^{n+1} - 1]$	نسبة فضائية
	0.25	$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$	
	0.75	تمرين 2: (4 نقاط) 1. معادلة سطح الكرة S هي $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$	نسبة فضائية
	0.75	2. أ) معادلة المستوي (P) هي $x - 2y - 2z - 3 = 0$	

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
المجموع	مجزأة		
04	0.75 0.75 0.5+0.5	ب) $B(-1,1,-3)$ هي نقطة تقاطع (D) و (P) منه $d(C;(D)) = BC = 3$ ج) نستنتج أن (D) مماس لسطح الكرة S	
05	0.25 0.75 0.75 0.25×6 0.5+0.25 0.5+0.5	تمرين 3: (5 نقاط) 1. أ) المعادلة (E) تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$ لأن $PGCD(3,21)=3$ والعدد 78 يقبل القسمة على 3 ب) إثبات أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$ استنتاج حلول (E): $(x,y) = (5+7k, -3+k)$ مع $k \in \mathbb{Z}$ 2. أ) دراسة بواقي قسمة العدد 5^n على 7 $5^{6m+3} \equiv 6[7]$ ، $5^{6m+2} \equiv 4[7]$ ، $5^{6m+1} \equiv 5[7]$ ، $5^{6m} \equiv 1[7]$ $m \in \mathbb{N}$ ، $5^{6m+5} \equiv 3[7]$ ، $5^{6m+4} \equiv 2[7]$ ب) تعيين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ * نعلم أن حلول (E) هي : $(x,y) = (5+7k, -3+k)$ وحيث أن $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ فإن $k \geq 3$ بوضع $k' = k - 3$ مع $k \geq 3$ نجد $k = k' + 3$ مع $k' \in \mathbb{N}$ ومنه $(x,y) = (26+7k', k')$ نعوض x و y في $5^x + 5^y \equiv 3[7]$ فنجد $5^{k'+1} \equiv 3[7]$ * وباستخدام بواقي قسمة 5^n على 7 نجد $k' = 6m + 4$ مع $m \in \mathbb{N}$ منه $(x,y) = (42m + 54, 6m + 4)$	الموافقات
	0.25 0.25 2×0.25+0.5 0.25+0.5 0.25×4	تمرين 4: (6 نقاط) 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$ تفسير النتيجة: يوجد نصف مماس يوازي محور الترتيب * دراسة تغيرات الدالة f حيث: * $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ - إشارة $f'(x)$ واتجاه التغير - جدول التغيرات * إنشاء المنحنى (C) والمستقيم (D) 2. أ- تمثيل الحدود U_0, U_1, U_2 على محور الفواصل باستعمال المستقيم (D) والمنحنى (C)	الدوال العددية المتتاليات العددية

العلامة		عناصر الإجابة	معايير الموضوع
المجموع	مجزأة		
06	0.5	ب- التخمين:	
	0.75	المتتالية (U_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة	
	0.75	3. أ- البرهان بالتراجع على العدد الطبيعي n أن : $2 \leq U_n \leq 5$	
	0.25	البرهان بالتراجع أن : $U_{n+1} > U_n$ (يمكن استعمال العلاقة $U_{n+1} = f(U_n)$)	
	0.5	ب- استنتاج أن (U_n) متقاربة:	
		حسب جوابي السؤالين أ و ب من 3 فإن (U_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة تماماً وبالتالي فهي متقاربة وهو ما يؤكد صحة المخمّنة السابقة	
		* حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 5$	
		انتهى	

العلامة		عناصر الإجابة	محاو الموضوع
المجموع	مجزأة		
تمرين 1: (5 نقاط)			
0.5	0.5	(1) بيان أنه إذا كان $P(a) = 0$ فإن $P\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ (0 ليس جذرا لـ $P(z)$).....	الأعداد المركبة
0.5	0.5	(2) $P(1+i) = 0$	
	0.25	(3) حلول المعادلة : $1+i$ حل إذا مقلوبه $\frac{1-i}{2}$ حل كذلك	
2	0.75	الحلان الآخران هما حلا المعادلة : $2z^2 + (3-i)z + 2 = 0$	
	1	 $\Delta = -8 - 6i = (1-3i)^2$ ، $z = \frac{-1-i}{2}$ أو $z = -1+i$	
1.5	0.25×2 0.5×2+	(4) الشكل الأسى للحلول	المتتاليات العددية
0.5	0.5	(5) $ABCD$ مربع من أجل $m = 2$	
تمرين 2: (4 نقاط)			
0.75	0.75	(1) $U_1 = \frac{7}{3}$ و $U_2 = \frac{23}{9}$ و $U_3 = \frac{73}{27}$	
	1+0.25	(2) - البرهان بالتراجع	
2.25	0.5	 $U_n = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$	
	0.5	 $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$	
1	2×0.5	(3) المجموع $S = \frac{n(n+1)}{3} + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 3$	

العلامة		عناصر الإجابة	المجموع	
مجزأة				
0.5	0.5	تمرين 3: (4 نقاط)		
	0.25	1- (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي		
	0.25	2- أ) $(MN) \perp (\Delta)$ يكافئ $3\alpha + \lambda + 6 = 0$		
	0.25	$(MN) \perp (\Delta')$ يكافئ $8\alpha + 21\lambda + 46 = 0$		
	2x0.25	$\alpha = -\frac{16}{11}$ و $\lambda = -\frac{18}{11}$		
	2x0.25	$N\left(\frac{50}{11}, \frac{43}{11}, \frac{39}{11}\right)$ و $M\left(\frac{15}{11}, \frac{13}{11}, \frac{14}{11}\right)$		
0.25	0.25	ب) $MN = \frac{5\sqrt{110}}{11}$		
	1	3- معادلة المستوي (P) هي $7x + 6y + 5z - 23 = 0$		
	0.5	4- المسافة: $d = \frac{ 42 + 7\alpha + 6 - 12\alpha + 25 + 5\alpha - 23 }{\sqrt{49 + 36 + 25}} = \frac{5\sqrt{110}}{11}$		
1.75	0.25	نلاحظ أن: $d = MN$		
	2	تمرين 4: (7 نقاط)		
		0.25x2	1- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	
		0.5+0.5	- المشتق وإشارته	
	1	0.5	- جدول التغيرات	
		0.25x2	2- $(0,1)$ نقطة إنعطاف و معادلة المماس $y=1$	
		0.5	- إثبات أن ω مركز تناظر للمنحنى	
	1	0.25x2	3- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+3)) = 0$	
		0.25x2	- استنتاج معادلي المستقيمين المقاربين	
		0.5+0.5	4- للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد x_0 من المجال $[-2.77; -2.76]$	
	2	0.25x2	$f(1) \approx 1.08$; $f(-1) = 0.92$	
		0.5	- رسم C_f	
		0.25+0.25	1-II $g(x) = f(-x)$ و C_g هو نظير C_f بالنسبة لحامل محور الترتيب	
		0.5	2) إنشاء C_g	