



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:  
الموضوع الأول

التمرين الأول : 05 نقاط

- ( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بجدها الأول  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2u_n+5}{14-4u_n}$
- (1) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{12}{14-4u_n}$   
ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{5}{2}$   
ج - بين أن ( $u_n$ ) متتالية متناقصة تماما واستنتج أنها متقاربة.
- (2) ( $v_n$ ) المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كإيلي :  $v_n = \frac{au_{n-1}}{2u_n-5}$   
- عين قيمة العدد الطبيعي  $a$  حتى تكون ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{3}$
- (3) نضع في كل مايلي  $a = 2$

- أ - عبر بدلالة  $n$  عن  $v_n$  و  $u_n$  ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
- ب - أحسب المجموع  $S$  حيث :  $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{2021}$
- ج - أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = \frac{1}{u_0-2,5} + \frac{1}{u_1-2,5} + \dots + \frac{1}{u_n-2,5}$

التمرين الثاني : 04 نقاط

- يحتوي صندوق 09 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 04 كريات بيضاء مرقمة بـ 0 ; 1 ; 2 ; 3 و 04 كريات حمراء مرقمة بـ : 0 ; 1 ; 2 ; 3 و كرية سوداء تحمل الرقم : -1
- (1) نسحب على التوالي ودون إرجاع كرتين من الصندوق ونعتبر الحدثين :
- $A$  : " الكريات المسحوبة مختلفة اللون " ،  $B$  : " الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 2 "
- أ - بين أن  $P(A) = \frac{2}{3}$  ثم أحسب  $P(B)$  احتمال الحدثين  $A$  و  $B$  على الترتيب .
- ب- أحسب احتمال سحب كرتين مختلفتين في اللون ومجموع أرقامها يساوي 2 .
- (2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقام فردية المتبقية في الكيس .
- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي  $X$  واحسب أمله الرياضي  $E(X)$  .
- (3) نضيف  $n$  كرية سوداء تحمل الرقم -1 ونسحب عشوائيا على التوالي و دون إرجاع كرتين من هذا الصندوق.
- نعتبر الحدث  $C$  : " الكرتين المسحوبتين سوداوين "
- بين أن  $P(C) = \frac{n^2+n}{n^2+17n+72}$  ثم عين عدد الكرات السوداء المضافة إلى الصندوق بحيث يكون  $P(C) = \frac{15}{91}$

## التمرين الثالث : 4 نقاط

$f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = x - 3 + (x + 1)^2 e^{-x}$  وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) تحقق أن الدالة  $G: x \rightarrow (-x - 1)e^{-x}$  دالة أصلية للدالة  $g: x \rightarrow xe^{-x}$  على  $\mathbb{R}$

(2) نضع  $I = \int_0^1 xe^{-x} dx$  و  $J = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

أ - باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن :  $J = 2I - e^{-1}$   
 ب - أحسب قيمة  $I$  ثم استنتج قيمة  $J$ .

(3) أ - بالإستعانة بنتائج السؤال (2 - ب) أحسب العدد الحقيقي  $A$  حيث :  $A = \int_0^1 (x + 1)^2 e^{-x} dx$   
 ب - فسر النتيجة المحصل عليها هندسياً.

## التمرين الرابع : 7 نقاط

I / الدالة العددية المعرفة على  $]1; +\infty[$  كإيلي :  $g(x) = \frac{1}{x-1} - \ln(x-1)$

$(C_g)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ - أحسب  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  وفسر النتيجة هندسياً.

ب - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أ - بين أنه من أجل كل حقيقي  $x$  من  $]1; +\infty[$  فإن :  $g'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ - بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $]1; +\infty[$  ثم تحقق أن :  $2.7 < \alpha < 2.8$   
 ب - استنتج إشارة  $g(x)$  على  $]1; +\infty[$

II / نعتبر  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $]1; +\infty[$  كإيلي :  $f(x) = 4e^{-x} \ln(x-1)$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ - بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ، فسر النتيجة هندسياً.

ب - أحسب  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ، فسر النتيجة المحصل عليها.

(2) أ - برر قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على  $]1; +\infty[$  ثم بين أنه من أجل كل  $x$  من  $]1; +\infty[$  :  $f'(x) = 4e^{-x} g(x)$   
 ب - استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها.

(3) أنشئ المنحنيين  $(C_g)$  و  $(C_f)$  (الوحدة  $2cm$ ) (نضع  $\alpha = 2,75$  و  $f(\alpha) = 0,14$ )

(4) تحقق أن :  $\ln(\alpha - 1) = \frac{1}{\alpha - 1}$

(5) - نضع :  $U = \int_2^\alpha \frac{1}{x-1} dx$  و  $V = \int_2^\alpha \ln(x-1) dx$

أ - أحسب العدد الحقيقي  $U$  و باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن :  $V = 3 - \alpha$

ب - لتكن  $A$  مساحة الحيز بـ  $cm^2$  المحدد بالمنحنى  $(C_g)$  ومحور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين  $x = \alpha$  و  $x = 2$

ج - بين أن  $U - V = \frac{(\alpha - 2)^2}{\alpha - 1}$  واستنتج المساحة  $A$ .

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول : 4 نقاط

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة بجدها الأول  $u_0 = 0$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}$  (1) أحسب  $u_1$  ،  $u_2$  .

(2) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n < \sqrt{2}$

ب - أدرس اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) وبين أنها متقاربة .

(3) ( $v_n$ ) المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كيلي :  $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}$

أ - بين أن ( $v_n$ ) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب - أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  .

ج - استنتج أن  $u_n = \frac{\sqrt{2}n}{n+1}$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

د - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $S_n = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$

- بين أن :  $S_n = \frac{1}{2} n \ln 2 - \ln(n+1)$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

### التمرين الثاني : 5 نقاط

يحتوي صندوق  $U_1$  على 9 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس منها كرتين بيضاويتين مرققة: 2 ، 3 و ثلاث كريات حمراء مرققة : 1 ، 3 ، 3 و أربع كريات سوداء مرققة 2 ، 2 ، 3 ، 3 . نسحب عشوائيا وفي أن واحد كرتين من الصندوق  $U_1$  نعتبر الحدثين A : " الكرتين المسحوبتين من نفس الرقم " و B : " الكرتين المسحوبتين من نفس اللون "

(1) أ - أحسب  $P(A)$  و  $P(B)$  احتمالي الحدثين A و B على الترتيب .

ب - بين أن :  $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$  ثم استنتج  $P_A(B)$  و  $P(A \cup B)$  .

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء رقي الكرتين المسحوبتين .

- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  ثم أحسب أمله الرياضي  $E(X)$

(3) نعتبر الصندوق الأول  $U_1$  وصندوق آخر  $U_2$  يحتوي على 6 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس منها كرتين بيضاويتين

مرققة ب: 1 ، 1 و كرتين حمراوين مرققة ب: 1 ، 3 و كرتين سوداوين مرققة ب: 2 ، 2

نرمي حجر نرد متوازنة مرققة من 1 إلى 6 مرة واحدة فعند ظهور رقم فردي نسحب كرة من الصندوق الأول  $U_1$  وعند

ظهور رقم زوجي نسحب كرة من الصندوق  $U_2$  .

(أ) شكل شجرة الاحتمالات التي تمذج هذه الوضعية.

(ب) بين أن احتمال ظهور كرة بيضاء هو  $P(B') = \frac{5}{18}$  .

(ج) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ، ما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني  $U_2$  ؟

- (1) عين الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  و  $c$  بحيث من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$
- (2)  $\lambda$  عدد حقيقي أكبر تماما من 1 ، أحسب العدد الحقيقي  $A$  حيث :  $A = \int_1^\lambda \frac{1}{x(x+1)^2} dx$
- (3) نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على المجال  $[1; +\infty[$  بـ :  $F(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{\ln x}{(x+1)^3} dx$
- أ - باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب بدلالة  $\lambda$  العدد الحقيقي  $F(\lambda)$  .
- ب - بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2} = 0$  ، ثم استنتج  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda)$

### التمرين الرابع : 7 نقاط

I /  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$

- (1) أدرس تغيرات الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g(x) \geq 0$
- II / نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كيلي :  $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$
- ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) أ - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .
- ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = g(x)$
- ج - أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) أ - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$  ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
- ب - أدرس الوضع النسبي للمنحنى ( $C_f$ ) والمستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة  $y = x - 1$  .
- ج - بين أن المنحنى ( $C_f$ ) يقبل مماسا ( $T$ ) يوازي ( $\Delta$ ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .
- (3) أ - بين أن المنحنى ( $C_f$ ) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $a$  حيث  $0,1 < a < 0,2$  .
- ب - أحسب  $f(1)$  ، ثم أنشئ كلا من ( $T$ ) ، ( $\Delta$ ) والمنحنى ( $C_f$ ) .
- (4) ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $xe^{-x+2} - 1 - m = 0$
- (5) أ - بين أن الدالة  $K: x \rightarrow (-x-1)e^{-x+2}$  هي دالة أصلية للدالة  $k: x \rightarrow xe^{-x+2}$  على  $\mathbb{R}$  .
- ب - أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى ( $C_f$ ) والمستقيم ( $\Delta$ ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما :  $x = 2$  و  $x = 3$