



الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين

(I) نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = e^{-x} + x - 1$ و $h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}$

(1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; +\infty[$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $0 \leq g(x)$

(2) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة h على المجال $[0; +\infty[$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $h(x) \leq 0$

(3) استنتج مما سبق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{x^2}{2} - x + 1$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = (x+2)e^{-\frac{x}{2}}$ ، $x > 0$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى

المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) بين أن الدالة مستمرة في من اليمين

(2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

ب) ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانا.

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(4) أ) بالإستعانة بالجزء (I) السؤال (3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $\frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

ب) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$

ج) عين معادلة المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

(5) مثل المستقيم المقارب المائل والمنحنى (C_f)

تصحيح الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين

(I) نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = e^{-x} + x - 1$ و $h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}$

(أ) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; +\infty[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ومن أجل كل x من $[0; +\infty[$: $g'(x) = -e^{-x} + 1$

$-e^{-x} + 1 \geq 0$ يكافئ $-e^{-x} \geq -1$ يكافئ $e^{-x} \leq 1$ يكافئ $-x \leq 0$ يكافئ $x \geq 0$ ومنه $x \in [0; +\infty[$

ومنه

x	0 $+\infty$
$g'(x)$	+

وعليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $0 \leq g(x)$

بما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ فإن $g(0) = 0$ قيمة حدية صغرى للدالة g على المجال $[0; +\infty[$ ومنه

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $0 \leq g(x)$.

(1) (أ) دراسة اتجاه تغير الدالة h على المجال $[0; +\infty[$:

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ومن أجل كل x من $[0; +\infty[$:

$$h'(x) = g'(x) - x = -e^{-x} + 1 - x = -(e^{-x} + x - 1) = -g(x)$$

ومنه

x	0 $+\infty$
$h'(x)$	-

وعليه الدالة h متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $h(x) \leq 0$:

بما أن الدالة h متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ فإن $h(0) = 0$ قيمة حدية صغرى للدالة h على المجال $[0; +\infty[$ ومنه

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $h(x) \leq 0$.

(2) استنتج مما سبق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{x^2}{2} - x + 1$

لدينا مما سبق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $0 \leq g(x)$ ، $0 \leq e^{-x} + x - 1$ يكافئ

$$(1) \dots\dots\dots 1 - x \leq e^{-x} \text{ يكافئ}$$

لدينا مما سبق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $h(x) \leq 0$ ، $h(x)$ يكافئ

$$(2) \dots\dots\dots e^{-x} - \leq \frac{x^2}{2} - x + 1 \text{ يكافئ } e^{-x} + x - 1 - \frac{x^2}{2} \leq 0 \text{ يكافئ } g(x) - \frac{x^2}{2} \leq 0$$

من (1) و (2) نستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{x^2}{2} - x + 1$ ،

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ $\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}} , & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى

المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) تبين أن الدالة f مستمر في 0 من اليمين:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ ومنه الدالة } f \text{ مستمر في } 0 \text{ من اليمين.} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-2}{x}} = 0 \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2)e^{\frac{-2}{x}} = 0$$

(2) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+2)e^{\frac{-2}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+2)}{x} e^{\frac{-2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{-2}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (1-t)e^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t - te^t = 0$$

ب) الإستنتاج : الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين

✓ فسر النتيجة بيانيا : (C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة 0 نصف مماس معامل توجيهه 0 (موازي إلى محور الفواصل)

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = (1) \left(e^{\frac{-2}{x}} \right) + \left(\frac{2}{x^2} e^{\frac{-2}{x}} \right) (x+2) = e^{\frac{-2}{x}} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = e^{\frac{-2}{x}} \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x^2} \right)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 + 2x + 4$ لأن $\frac{e^{\frac{-2}{x}}}{x^2} > 0$ ، نحل المعادلة $x^2 + 2x + 4 = 0$ نجد $\Delta < 0$ ومنه إشارة العبارة

$$f'(x) > 0 :]0; +\infty[\text{ من } x \text{ كل أجل ومنه } x^2 + 2x + 4 > 0 \text{ ومنه } a = 1 \text{ إشارة } [x^2 + 2x + 4]$$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$+\infty$

(4 أ) بالإستعانة بالجزء I السؤال 3) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$:

من أجل $x > 0$ فإن $\frac{2}{x} > 0$ ولدينا من الجزء I السؤال 3) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ،

$$\frac{x-2}{x} \leq e^{-\frac{2}{x}} \leq \frac{x^2-2x+2}{x^2} \quad 1 - \frac{2}{x} \leq e^{-\frac{2}{x}} \leq \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{2} - \frac{2}{x} + 1$$

بالضرب في العدد $(x+2)$ نجد $(x+2)e^{-\frac{2}{x}} \leq (x+2)\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)$ نجد

$$\frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} \quad \text{بعد النشر والتبسيط نجد} \quad (x+2)\left(\frac{x-2}{x}\right) - x \leq (x+2)e^{-\frac{2}{x}} - x \leq (x+2)\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right) - x$$

ب) استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$:

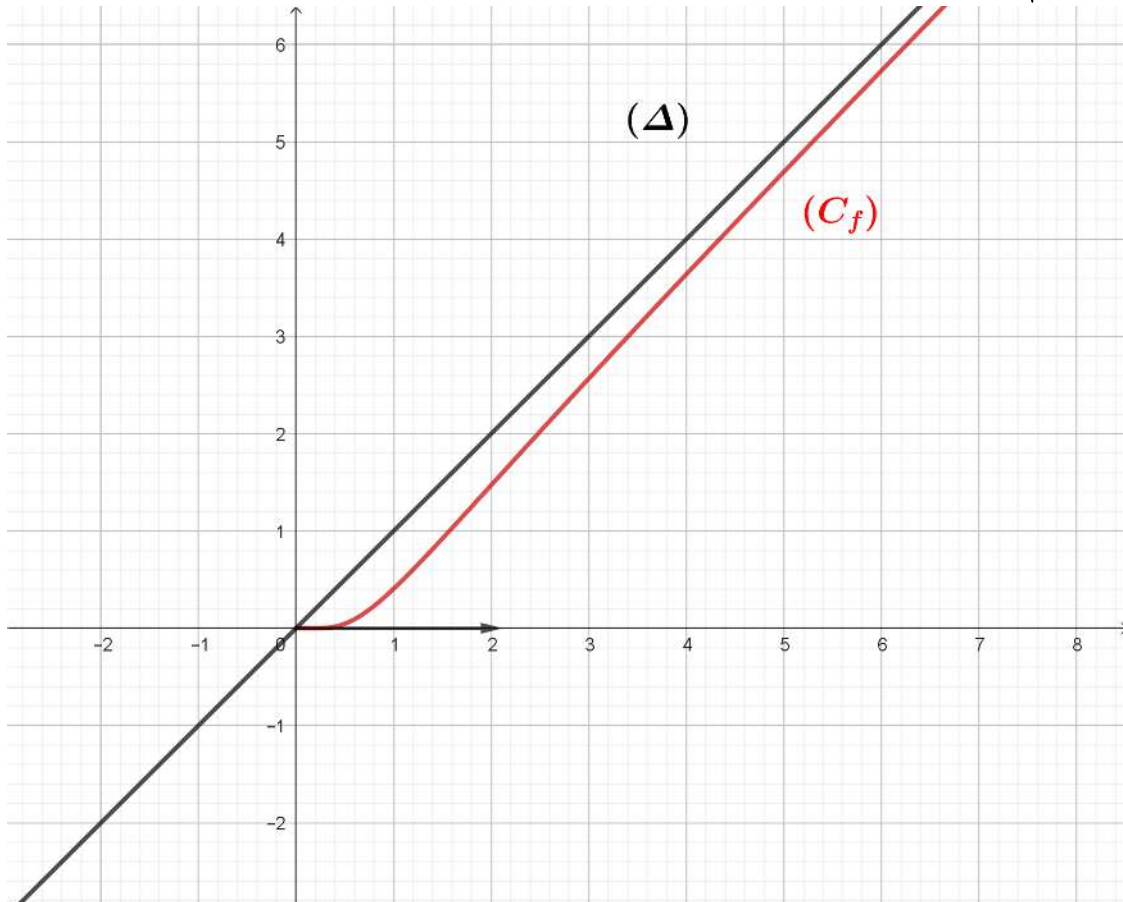
لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x} = 0$

إذن بإستعمال النهاية بالحصر نجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$

ج) عين معادلة المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

(5) مثل المستقيم المقارب المائل والمنحنى (C_f)



.....إنتهى