

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضياتالتمرين الأول: (6 نقاط)

يحتوي صندوق U على 10 كرات: 3 منها بيضاء و 7 سوداء و يحتوي صندوق V على 10 كرات: 7 منها بيضاء و 3 سوداء (الكرات لا نفرق بينها باللمس) .

I نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U : اذا كانت بيضاء نعيدها الى نفس الصندوق و نسحب منه عشوائيا 3 كرات في أن واحد. أما اذا كانت سوداء فنضعها في الصندوق V و نسحب منه عشوائيا 3 كرات على التوالي و بدون ارجاع. نعتبر الحادثتين:

A: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق U .

B: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق V .

1 أحسب كل من: $P(A)$ و $P(B)$.

2 استنتج احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة بيضاء .

3 اذا علمت أن الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق U .

II نفرغ محتوى الصندوقين U و V في كيس غير شفاف و نضيف له n كرة حمراء ($n \geq 2$).
نسحب عشوائيا من الكيس كرتان على التوالي مع الإرجاع. نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس.

1 برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: $\{n-2; n-1; n\}$.

2 عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

3 نضع $n = 2$ ، احسب الأمل الرياضي، التباين و الانحراف للمتغير العشوائي X .

التمرين الثاني: (5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\square$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{cases}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n \times u_n$.

1 بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ ، ثم اكتب v_n بدلالة n .

2 أ) بين أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5.

ب) اكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

3 نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} \quad , \quad S'_n = w_n + w_{n+1} + \dots + w_{n+2020} \quad \text{و} \quad P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

✓ أحسب S_n ، S'_n و P_n بدلالة n .

التمرين الثالث (9 نقاط)

I نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\square$ كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z) = z^3 + (1 - i\sqrt{3})z^2 - 2\sqrt{3}iz - 2 - 2\sqrt{3}i$.

1 عين الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 1 - i\sqrt{3})(z^2 + az + b)$.

2 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\square$ المعادلة: $P(z) = 0$.

II نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقاط: A, B, C و D التي لواحقها

على الترتيب هي: $z_A = -1 + i$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 1 + i\sqrt{3}$, و $z_D = -z_A$.

1 أكتب العددين المركبان: z_A, z_C على الشكل الأسّي، استنتج الشكل الأسّي لكل من $z_B, \frac{z_A}{z_C}$.

2 أكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي، استنتج طبيعة المثلث OAB .

3 اكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

4 عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيلي صرف.

5 عين (E_1) و (E_2) مجموعتي النقاط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$$(E_1): |z + 1 - i| = |iz - 1 - i|$$

$$(E_2): \text{Arg}(z - 1 - \sqrt{3}i) = \text{Arg}(\overline{z} - 1 + \sqrt{3}i) + \pi + 2k\pi \quad (k \in \square)$$

6 نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z'

و الذي يحول النقطة A إلى B و يحول B إلى D .

a. بين أن العبارة المركبة للتحويل T هي: $z' = iz$.

b. عين طبيعة التحويل T و حدد عناصره المميزة.

c. عين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة D بالتحويل T .

d. ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقاط A, B, D و E .

أستاذكم تمنى لكم كل التوفيق و
النجاح - بن صافية -

الإجابة المقترحة للاختبار الفصل الثاني:

التمرين الأول: ☺:

I A: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء من الصندوق U.

B: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق V.

1 حساب كل من: $P(A)$ و $P(B)$:

$$P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{A_7^3}{A_{11}^3} = \frac{49}{330} \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

2 استنتاج احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة بيضاء:

(نسميها الحادثة C): قد تكون بيضاء ومن الصندوق U او بيضاء و من الصندوق V.

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{30} + \frac{49}{330} = \frac{60}{330} = \frac{2}{11}$$

4 إذا علمت أن الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء، ما هو

احتمال أن تكون من الصندوق U:

$$P_C(U) = \frac{P(C \cap U)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{2}{11}} = \frac{1 \times 11}{30 \times 2} = \frac{11}{60}$$

II نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس.

1 برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: $\{n; n-1; n-2\}$.

إذا سحبنا كرتان ليستا حمراواتان، يبقى في الكيس n كرة حمراء.

إذا سحبنا كرتان أحدهما حمراء، يبقى في الكيس n-1 كرة حمراء.

إذا سحبنا كرتان حمراواتان، يبقى في الكيس n-2 كرة حمراء.

2 قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

$$P(X = n) = \frac{20^2}{(n+20)^2} = \frac{400}{n^2 + 40n + 400}$$

$$P(X = n-1) = \frac{2(n^1 \times 20^1)}{(n+20)^2} = \frac{40n}{n^2 + 40n + 400}$$

$$P(X = n-1) = \frac{n^2}{(n+20)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 40n + 400}$$

X	n	n-1	n-2
$P(X = x_i)$	$\frac{400}{n^2 + 40n + 400}$	$\frac{40n}{n^2 + 40n + 400}$	$\frac{n^2}{n^2 + 40n + 400}$

3 نضع n = 2

X	2	1	0
$P(X = x_i)$	$\frac{400}{484}$	$\frac{80}{484}$	$\frac{4}{484}$

$$E(X) = \frac{2 \times 400 + 1 \times 80 + 0 \times 4}{484} = 1.8 \quad \checkmark \text{ الأمل الرياضي:}$$

$$V(X) = \frac{2^2 \times 400 + 1^2 \times 80 + 0^2 \times 4}{484} - (1.8)^2 = 0.23 \quad \checkmark \text{ التباين:}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.23} = 0.48 \quad \checkmark \text{ الانحراف:}$$

التمرين الثاني: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على

$$\begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{cases} \quad \text{كمايلي:}$$

$$\text{نضع: } w_n = 5^n \times u_n \quad \text{و} \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$$

1 اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$:

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+2} - \frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n} = \frac{\frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n - \frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n} \\ &= \frac{\frac{1}{5}(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n)}{(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n)} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\text{كتابة } v_n \text{ بدلالة } n: \text{ لدينا: } v_0 = u_1 - \frac{1}{5}u_0 = 1$$

$$\text{منه: } v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

2 (أ) تبيان أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 5^{n+1} \times u_{n+1} - 5^n \times u_n \\ &= 5^n (5u_{n+1} - u_n) \end{aligned}$$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = v_n + \frac{1}{5}u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{5}u_n \quad \text{منه: } v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 5^n \left(5 \left(\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{5}u_n \right) - u_n \right) \\ &= 5^n \left(5 \times \frac{1}{5^n} + u_n - u_n \right) = 5 \end{aligned} \quad \text{اذن:}$$

$$\text{(ب) كتابة } w_n \text{ بدلالة } n: w_n = w_0 + nr = 0 + n \times 5 = 5n$$

استنتاج u_n بدلالة n:

$$u_n = \frac{w_n}{5^n} = \frac{5n}{5^n} \quad \text{منه: } w_n = 5^n \times u_n$$

3 حساب S_n و S'_n و P_n بدلالة n:

$$\frac{z_A}{z_C} = \frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(-1+i)(1-i\sqrt{3})}{1^2 + \sqrt{3}^2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

استنتاج القيمة المضبوطة لـ: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}\right)$$

(4) عين قيم العدد الطبيعي n:

$$\cdot \text{Arg}\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{منه:} \quad \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$$

$$n\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \times \left(\frac{2}{-\pi}\right)$$

$$n = -1 - 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(5) تعيين (E_1) و (E_2) :

$$\text{لدينا: } (E_1): |z+1-i| = |iz-1-i| \quad \text{منه:}$$

$$(E_1): |z - (-1+i)| = |i(z+i-1)|$$

$$(E_1): |z - z_A| = |z - z_D| \quad \text{تكافئ: } AM = DM$$

منه: (E_1) هي محور القطعة المستقيمة $[AD]$.

لدينا:

$$(E_2): \text{Arg}(z-1-\sqrt{3}i) = \text{Arg}(\bar{z}-1+\sqrt{3}i) + \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(E_2): \text{Arg}(z-(1+\sqrt{3}i)) = -\text{Arg}(\bar{z}-1+\sqrt{3}i) + \pi + 2k\pi$$

$$(E_2): \text{Arg}(z-(1+\sqrt{3}i)) = -\text{Arg}(z-(1+\sqrt{3}i)) + 2k\pi + \pi + 2k\pi$$

$$(E_2): 2\text{Arg}(z-(1+\sqrt{3}i)) = \pi + 4k\pi$$

$$(E_2): \text{Arg}(z-(1+\sqrt{3}i)) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$(E_2): (\overline{U}; \overline{MC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

منه: (E_2) هي نصف المستقيم (CM) الموازي لمحور الترتيب ما عد النقطة C .

(6)

(أ) تبيان أن العبارة المركبة للتحويل T هي: $z' = iz$:

T يكتب على الشكل: $z' = az + b$ و يحول النقطة A إلى B

$$\text{اذن: } \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{cases} \quad \text{منه: } B \text{ يحول إلى } D$$

$$b = z_B - az_A = 0 \quad \text{و} \quad a = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_B} = i$$

(ب) طبيعة التحويل T و عناصره المميزة:

$$\theta = \text{Arg}(a) = \frac{\pi}{2} \quad \text{منه } T \text{ دوران زاويته } \theta \quad \text{و} \quad |a| = 1 \quad \text{و} \quad a \in \mathbb{C}$$

$$\text{و مركزه } \Omega \text{ حيث: } z_\Omega = \frac{b}{1-a} = 0$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q} \right)$$

$$= 1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} \right) = \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right)$$

$$S'_n = w_n + w_{n+1} + \dots + w_{n+2020}$$

$$= \frac{n+2020-n+1}{2} (w_n + w_{n+2020})$$

$$= \frac{2021}{2} (5n + 5(n+2020)) = 2021(5n+1010)$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

$$= 1 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \dots \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{و:}$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{0+1+2+\dots+n} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n+0+1}{2}(n+1)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

التمرين الثالث:

$$(I) \quad P(z) = z^3 + (1-i\sqrt{3})z^2 - 2\sqrt{3}iz - 2 - 2\sqrt{3}i$$

(1) تعيين الأعداد الحقيقية a و b :

$$P(z) = (z-1-i\sqrt{3})(z^2+az+b)$$

نجد: $a=2$ و $b=2$

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $P(z)=0$ المعادلة:

$$z_2 = -1-i \quad \text{و} \quad z_1 = -1+i, \quad z_0 = 1+i\sqrt{3}$$

$$(II) \quad z_D = -z_A \quad \text{و} \quad z_C = 1+i\sqrt{3}, \quad z_B = \bar{z}_A, \quad z_A = -1+i$$

(1) أكتب العددين المركبان: z_A, z_C على الشكل الأسّي، استنتج

الشكل الأسّي لكل من z_A, z_B, z_C :

$$z_B = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}$$

$$z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\frac{z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)} \quad \text{و}$$

(2) كتابة $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري و الأسّي، ثم استنتاج طبيعة

المثلث OAB :

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)} \quad \text{منه: } \frac{z_A}{z_B} = \frac{(-1+i) \times (-1-i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{1-1-2i}{1+1} = -i$$

$$\text{منه: } \left| \frac{z_A}{z_B} \right| = 1 \quad \text{و} \quad \text{Arg}\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad OA = OB$$

منه: $(\overline{OB}; \overline{OA}) = -\frac{\pi}{2}$

(3) اكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري:

(ت) تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة D :

$$z_E = iz_D \text{ منه: } z_E = i(1-i) = i+1$$

(ث) نستنتج أن النقط A ، B ، D و E تنتمي الى نفس

الدائرة ذات المركز O و نصف القطر $R = \sqrt{2}$.