

الموضوع الثالث

التمرين الأول:

من أجل كل عدد صحيح n نضع : $A(n) = n^2 - n + 2007$

(1) أ - حلل إلى جداء عوامل أولية العددين 4014 و $A(1)$.

ب - أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014 و $A(1)$.

(2) بين أنه إذا كان n يقسم 3 فإن $A(n)$ يقسم 3 ، وهل العكس صحيح ؟ برر إجابتك .

(3) تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n : $(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n$

(4) بين أنه إذا كان $A(n)$ عدد فردي فإن $A(n+1)$ عدد فردي .

(5) عين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A(n)$ يقسم $A(1)$.

التمرين الثاني:

عين في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح الوحيد مع التبرير

(1) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y' + 3y = 0$

$y = Ce^{\frac{1}{3}x}$	$y = Ce^{-\frac{1}{3}x}$	$y = Ce^{3x}$	$y = Ce^{-3x}$
-------------------------	--------------------------	---------------	----------------

(2) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 6$

$y = Ce^{\frac{1}{2}x} + 3$	$y = Ce^{2x} - 3$	$y = Ce^{\frac{1}{2}x} + 3$	$y = Ce^{2x} + 3$
-----------------------------	-------------------	-----------------------------	-------------------

(3) العدد $3 - \ln(e^2) + e$ يساوي

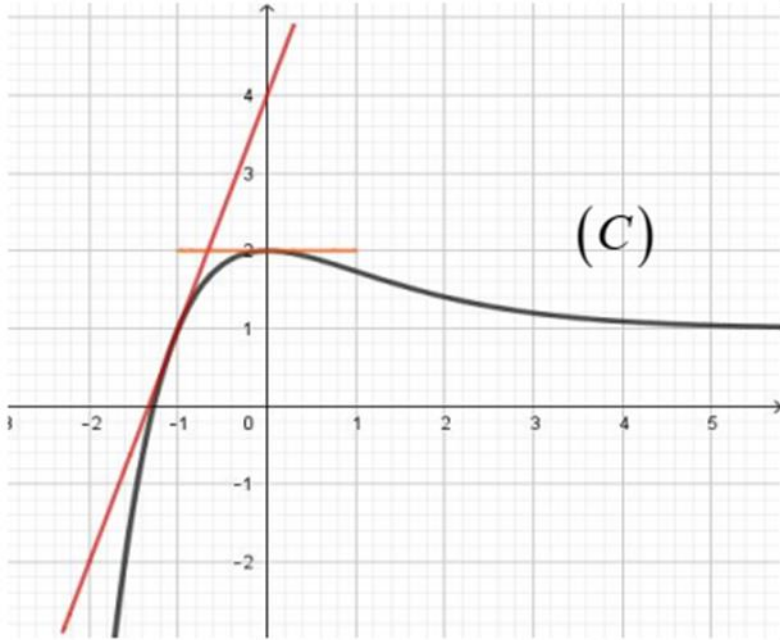
$1 + e$	2	0	$2 - e$
---------	---	---	---------

(4) العدد $e^{-3\ln(2)}$ يساوي

$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	8	1
---------------	---------------	---	---

(5) حلول المعادلة $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ هي

$\{e^2; e^3\}$	$\left\{\ln\left(\frac{1}{2}\right); \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$	$\{\ln(2); \ln(3)\}$	$\{2; 3\}$
----------------	---	----------------------	------------



المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، المنحنى (C) في الشكل هو لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
 $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ حيث a و b عدنان حقيقيان .

1. أ - بقراءة بيانية عين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النهاية الأخيرة بيانيا .

ب - عين كل من : $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(1)$.

ج - اعتمادا على ما سبق جد قيمة كل من a و b ثم استنتج عبارة $f(x)$.

2. أ - بين أن المعادلة تقبل $f(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-1,4 < \alpha < -1,2$.

ب - استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

3. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = (|x| + 1)e^{-x} + 1$

- احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 2}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 2}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا ، (نقبل أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$)



نضع فيما يلي : $f(x) = (x + 1)e^{-x} + 1$ ونعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x) = x - \frac{x + 2}{e^x}$ و

(C_g) منحنائها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$ ،

1. أ - أحسب كلا من $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ب - بين أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة g بجوار $(+\infty)$.

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x) = f(x)$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فصلتها 1 - .

4. بين أن $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $g(\alpha)$.

5. أ- أحسب $g(0)$ ثم أنشئ كلا من (Δ)، (T) والمنحنى (C_g).
ب - m وسيط حقيقي ، ناقش حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $g(x) = x + m$.

بالتوفيق

انتهى

﴿ ترقبوا الحول قريبا إن شاء الله ﴾

حل الموضوع الثالث

التمرين الأول:

من أجل كل عدد صحيح n نضع : $A(n) = n^2 - n + 2007$

(1) أ - تحليل إلى جداء عوامل أولية للعددين 4014 و $A(1)$:

$$A(1) = (1)^2 - 1 + 2007 = 2007 = 3^2 \times 223$$

$$4014 = 2A(1) = 2 \times 3^2 \times 223$$

ب - إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014 و $A(1)$:

$$p \gcd(A(1); 4014) = p \gcd(A(1); 2A(1)) = A(1) = 2007$$

(2) التبين أنه إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$:

لدينا : 3 يقسم n وبالتالي 3 يقسم n^2 و 3 يقسم n وبالتالي 3 يقسم $-n$

ومن جهة أخرى 3 يقسم 2007 ومنه : إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $n^2 - n + 2007$ أي : إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$

العكس غير صحيح لأن : $A(4) = (4)^2 - 4 + 2007 = 2019$ أي أن 3 يقسم $A(4)$ من أجل $n = 4$ لكن 3 لا يقسم 4 .

(3) التحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n : $(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n$

$$(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = [n^2 + 2n + 1] - (n+1) + 2007$$

$$= n^2 + 2n - n + 1 - 1 + 2007$$

$$= n^2 + n + 2007$$

$$= (n - n + 2007) + 2n$$

(4) التبين أنه إذا كان $A(n)$ عدد فردي فإن $A(n+1)$ عدد فردي :

إذا كان $A(n)$ فردي فإنه يوجد عدد صحيح k : $A(n) = 2k + 1$

لدينا : $A(n) = n^2 - n + 2007$ ومنه : $A(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) + 2007$ أي أن :

$$A(n+1) = A(n) + 2n + 2k + 1 + 2n = 2(k+n) + 1$$

نضع : $k' = k + n$ ومنه : $A(n+1) = 2k' + 1$ حيث k' عدد صحيح

الخلاصة : إذا كان $A(n)$ عدد فردي فإن $A(n+1)$ عدد فردي كذلك .

(5) تعيين الاعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A(n)$ يقسم $A(1)$:

$A(1)$ يقسم $A(1)$ معناه $n^2 - n + 2007$ يقسم 2007 ونعلم أن مجموعة قواسم 2007 هي :

$\{-2007; -669; -223; -9; -3; -1; 1; 3; 9; 223; 669; 2007\}$ ومنه

$n^2 - n + 2007 =$	-2007	-669	-223	-9	-3	-1	1	3	9	223	669	2007
--------------------	-------	------	------	----	----	----	---	---	---	-----	-----	------

ومنه $n = 0$ أو $n = 1$

التمرين الثاني:

تعين في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح الوحيد مع التبرير

(1) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y' + 3y = 0$ أي $y' = -3y$ حلها هو $y = Ce^{-3x}$

(2) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 6$ أي $y' = 2y + 6$ حلها هو $y = Ce^{2x} - \frac{6}{2}$ أي $y = Ce^{2x} - 3$

(3) العدد $3 - \ln(e^2) + e = 3 - 2 + e = 1 + e$: لأن $1 + e$ يساوي $3 - \ln(e^2) + e$

(4) العدد $e^{-3\ln(2)}$ يساوي $\frac{1}{8}$: لأن $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} = e^{\ln(2)^{-3}} = e^{-3\ln(2)}$

(5) حلول المعادلة $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ هي $\{\ln(2); \ln(3)\}$ لأن : بوضع $t = e^x$ تصبح المعادلة $t^2 - 5t + 6 = 0$

نحسب المميز : $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$ ومنه تقبل حلين متمايزين هما : $t_1 = 3$ و $t_2 = 2$

بالعودة الى المتغير الأصلي : $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$ ، $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$

التمرين الثالث:

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، المنحنى (C) في الشكل هو لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما

يلي : $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ حيث a و b عددان حقيقيان .

1. - بقراءة بيانية تعين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و تفسير النهاية الأخيرة بيانيا .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b)e^{-x} + 1 = 1 ، \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b)e^{-x} + 1 = -\infty$$

تفسير النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ بيانيا :

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ هو مستقيم مقارب افقي لمحور الفواصل بجوار $(+\infty)$.

ب - تعين كل من : $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(-1)$.

$$f(-1)=1 \text{ ، } f(0)=2$$

- $f'(0)$ هو معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 0 وهو افقي وعليه: $f'(0)=0$

- $f'(-1)$ هو معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها -1 والمار بالنقطتين $(0;4)$ و $(-2;-2)$ وعليه :

$$f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - (-2)}{0 - (-2)} = \frac{6}{2} = 3$$

ج - اعتمادا على ما سبق ايجاد قيمة كل من a و b واستنتاج عبارة $f(x)$:

$$\text{لدينا : } \begin{cases} f(0)=2 \\ f(-1)=1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} (a(0)+b)e^{0+1}=2 \\ (a(-1)+b)e^{-1+1}=1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} b+1=2 \\ (-a+b)e+1=1 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases}$$

2. أ - تبيان أن المعادلة تقبل $f(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $-1,4 < \alpha < -1,2$:

لدينا : f مستمرة علي $[-1,4; -1,2]$ و $f(-1,2)=0,33$ و $f(-1,4)=-0,62$ و $f(-1,2) \times f(-1,4) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,4 < \alpha < -1,2$

ب - استنتاج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$:

نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

3. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = (|x|+1)e^{-x} + 1$

- حساب كلا من $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$ ثم تفسر النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(|x|+1)e^{-x} + 1 - 2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(|x|+1)e^{-x} + 1 - 2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(-x+1)e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = -2$$

التفسير الهندسي :

الدالة لا تقبل الاشتقاق عند النقطة التي فاصلتها 0 ومنحنائها يقبل يقبل نصفى مماسي معامل توجيهها 0 و -2 .



نضع فيما يلي: $f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$ ونعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x) = x - \frac{x+2}{e^x}$ و

(C_g) منحناها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$

1. أ - حساب كلا من $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x+2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1+\frac{2}{x}}{e^x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x+2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) = +\infty\end{aligned}$$

ب - تبيان أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة g بجوار $(+\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x+2}{e^x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) = 0$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة g بجوار $(+\infty)$.

2. أ - تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g'(x) = f(x)$:

g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = \left(x - \frac{x+2}{e^x} \right)' = (x - (x+2)e^{-x})' = 1 - ((1-x-2)e^{-x}) = 1 - (-x-1)e^{-x} = f(x)$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا من السؤال السابق : $g'(x) = f(x)$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f(x)$ وعليه :

- $g'(x) = 0$ تكافئ $f(x) = 0$ ومنه $x = \alpha$
- $g'(x) < 0$ تكافئ $f(x) < 0$ ومنه $x \in]-\infty; \alpha[$ ومنه g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha[$
- $g'(x) > 0$ تكافئ $f(x) > 0$ ومنه $x \in]\alpha; +\infty[$ ومنه g متزايدة تماما على المجال $]\alpha; +\infty[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha)$	$+\infty$

3. كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها 1 - :

$$(\Delta): y = g'(-1)(x - (-1)) + g(1)$$

ولدينا : $g'(-1) = f(-1) = 1$ وكذلك $g(-1) = -1 - e$ ومنه : $(\Delta): y = 1(x + 1) - 1 - e$ ومنه : $(\Delta): y = x - e$

4. تبيان أن $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$ واستنتاج حصرا للعدد $g(\alpha)$.

لدينا : $g(\alpha) = \alpha - (\alpha + 2)e^{-\alpha}$

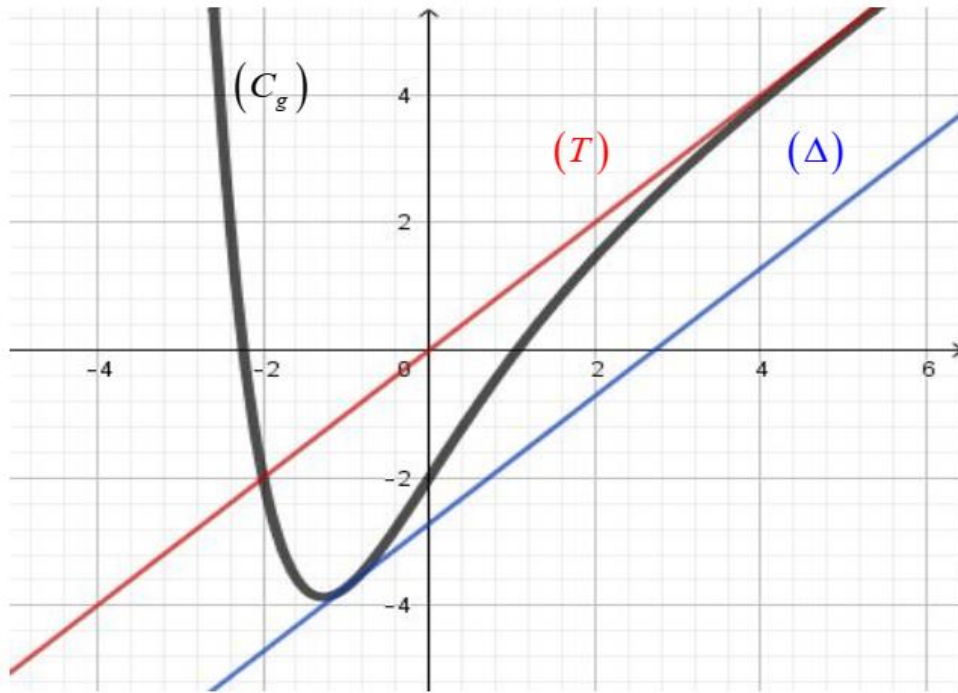
وكذلك لدينا : $f(\alpha) = 0$ تكافئ $(\alpha + 1)e^{-\alpha} + 1 = 0$ نستخرج منها قيمة $e^{-\alpha}$ أي : $e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha + 1}$ ونعوضها في $g(\alpha)$

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \alpha - (\alpha + 2) \frac{-1}{\alpha + 1} \\ &= \alpha + \frac{(\alpha + 1) + 1}{\alpha + 1} \\ &= \alpha + \frac{\alpha + 1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha + 1} \\ &= \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

نجد :

$$g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1} \quad \text{ومنه :}$$

5. أ - حساب $g(0)$ ثم أنشاء كلا من (Δ) ، (T) والمنحنى (C_g) : $g(0) = 0 - \frac{0+2}{e^0} = 0 - \frac{0+2}{1} = -2$



ب - المناقشة حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = x + m$:

حلول المعادلة $g(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$ والموازي للمستقيمين (Δ) و (T)

- من أجل $m \in]-\infty; -e[$ المعادلة ليس لها حلول .
- من أجل $m = -e$ المعادلة لها حل مضاعف سالب تماما
- من أجل $m \in]-e; -2[$ المعادلة لها حلان سالبان تماما .
- من أجل $m = -2$ المعادلة لها حلان أحدهما سالب و الآخر معدوم .
- من أجل $m \in]-2; 0[$ المعادلة لها حلان مختلفان في الإشارة .
- من أجل $m \in]0; +\infty[$ المعادلة لها حل واحد سالب تماما .