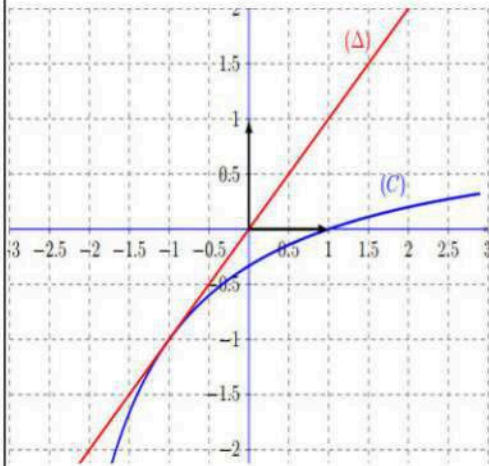


الواجب المنزلي رقم 03 في مادة الرياضيات

التمرين الأول (12 نقطة)

١. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $] -3; +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل المقابل



(I) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x من

$$f(x) = a + \frac{b}{x+3} \quad \text{المجال }] -3; +\infty[$$

٢. α عدد حقيقي (u_n) المتتالية العددية المعرفة

بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(II) عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

٣. نضع في كل ما يلي $\alpha = 0$

1. (أ) على الوثيقة المرفقة مثّل على حامل محور الفواصل

الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (دون حسابها) مع توضيح خطوط الإنشاء.

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n $-1 \leq u_n \leq 0$

3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم برر تقاربها.

(III) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

1. برهن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

2. اكتب عبارة كل من u_n و v_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ln\left(\frac{v_3}{v_2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

$$T_n = \frac{2024}{u_0 + 1} + \frac{2024}{u_1 + 1} + \frac{2024}{u_2 + 1} + \dots + \frac{2024}{u_n + 1}$$

احسب بدلالة n كل من S_n و T_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الثاني

١. الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^{2x} + ae^x + b}{e^x - 1}$ حيث a و b عددان حقيقيان، (C) تمثيلها

البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 1cm$

(I) عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة f حلا للمعادلة التفاضلية $y' - e^x + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$ وتحقق

$$f(\ln 3) = \frac{7}{2}$$

(II) نضع $a = -1$ و $b = 1$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن: $f(x) = e^x - 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$

2. عين الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق $F(\ln 2) = 2$.

3. لتكن A مساحة الحيز من المستوى المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمتين التي معادلتها $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = 2$

علما أن الدالة f موجبة تماما على المجال $[1; 2]$ احسب بـ cm^2 المساحة A .

أستاذ المادة: بوقرومي

الصفحة 2-2



بالتوفيق

الإجابة النموذجية للواجب المنزلي رقم 03 في مادة الرياضيات لقسم الثالثة علوم تجريبية

ب- التخمين:

نلاحظ أن: $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ ومنه نضمن أن المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو نقطة تقاطع (C) و (Δ) .

② البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$-1 \leq u_n \leq 0$$

نضع الخاصية: $p(n): -1 \leq u_n \leq 0$

نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$

لدينا: $u_0 = 0$ ومنه: $-1 \leq 0 \leq 0$

ومنه الخاصية $p(0)$ صحيحة.

نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل عدد

طبيعي n أي: $-1 \leq u_n \leq 0$

ونبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ أي نبرهن أن:

$$-1 \leq u_{n+1} \leq 0$$

لدينا: $-1 \leq u_n \leq 0$

بإضافة العدد 3 إلى أطراف المتباينة نجد:

$$2 \leq u_n + 3 \leq 3$$

بقلب أطراف المتباينة تصبح:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n + 3} \leq \frac{1}{2}$$

بضرب أطراف المتباينة في العدد -4 نجد:

$$-2 \leq -4 \frac{1}{u_n + 3} \leq -\frac{4}{3}$$

بإضافة العدد 1 إلى أطراف المتباينة نجد:

$$-1 \leq -4 \frac{1}{u_n + 3} + 1 \leq -\frac{4}{3} + 1$$

وبالتالي: $-1 \leq u_{n+1} \leq -\frac{1}{3}$

أي: $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ صحيحة.

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل

عدد طبيعي n : $-1 \leq u_n \leq 0$

③ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

التمرين الأول (12 نقطة)

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3}, x \in]-3; +\infty[\quad (I \text{ نـ})$$

تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل

$$f(x) = a + \frac{b}{x+3} \quad \text{كل } x \text{ من المجال }]-3; +\infty[\text{ فإن:}$$

لدينا من أجل كل x من $]-3; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-1}{x+3} \\ &= \frac{x+3-4}{x+3} \\ &= 1 + \frac{-4}{x+3} \end{aligned}$$

ومنه: $a = 1$ و $b = -4$

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (II)$$

تعيين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة:

(u_n) ثابتة معناه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \alpha$$

بالتعويض في العلاقة التراجعية نجد:

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 3} = \alpha$$

ومنه: $\alpha(\alpha + 3) = \alpha - 1$

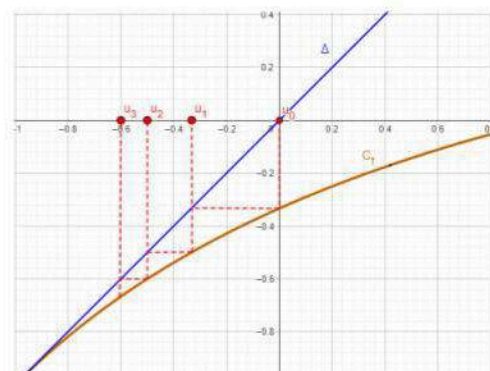
وبالتالي: $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$

أي: $(\alpha + 1)^2 = 0$

إذن: $\alpha = -1$

نضع: $\alpha = -1$ نـ

① أ- تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) :



من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n - 1}{u_n + 3} - u_n \\ &= \frac{u_n - 1 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} \\ &= \frac{-u_n^2 - 2u_n - 1}{u_n + 3} \\ &= \frac{-(u_n + 1)^2}{u_n + 3} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

لأن: $-(u_n + 1)^2 \leq 0$ و $u_n + 3 > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

التقارب: المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

$$v_n = \frac{1}{u_n + 1} ; n \in \mathbb{N} \quad (III)$$

① برهان أن (v_n) متتالية حسابية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{u_n - 1 + u_n + 3}{u_n + 3}} \\ &= \frac{1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3}} \\ &= \frac{u_n + 3}{2u_n + 2} \\ &= \frac{u_n + 3}{2(u_n + 1)} \\ &= \frac{u_n + 3}{2(u_n + 1)} + \frac{2}{2(u_n + 1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n + 1} \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} + v_n$$

و منه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ و حدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = \frac{1}{u_0 + 1} - 1$$

② كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$v_n = v_0 + nr$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{2}n$$

كتابة عبارة u_n بدلالة n : من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = \frac{1}{u_n + 1} \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{1}{v_n} = u_n + 1 \quad \text{بالتالي:}$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 1 \quad \text{أي أن:}$$

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}n} - 1 \quad \text{ومنه:}$$

$$u_n = \frac{-n}{2 + n} \quad \text{إذن:}$$

- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{2 + n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$$

③ حساب بدلالة n كل من T_n و S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ln\left(\frac{v_3}{v_2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{v_1}{v_0} \times \frac{v_2}{v_1} \times \dots \times \frac{v_n}{v_{n-1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{v_n}{v_0}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}n}{1}\right) \end{aligned}$$

$$S_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}n\right) \quad \text{إذن:}$$

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{2024}{u_0 + 1} + \frac{2024}{u_1 + 1} + \frac{2024}{u_2 + 1} + \dots + \frac{2024}{u_n + 1} \\ &= 2024\left(\frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1}\right) \\ &= 2024(v_0 + v_1 + \dots + v_n) \\ &= 2024\left(\frac{n+1}{2}\right)(v_0 + v_n) \end{aligned}$$

$$T_n = 2024 \left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{4+n}{2}\right)$$

$$T_n = 506(n+1)(n+4)$$

لدينا:

$$\begin{aligned} e^x - 1 + \frac{e^x}{e^x - 1} &= \frac{(e^x - 1)(e^x - 1) + e^x}{e^{2x} + 1 - 2e^x + e^x} \\ &= \frac{e^x - 1}{e^{2x} - e^x + 1} \\ &= \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

و منه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$

فإن: $f(x) = e^x - 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$

② تعيين الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$

و التي تحقق: $F(\ln 2) = 2$

لدينا: $f(x) = e^x - 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$

ومنه مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال

$]0; +\infty[$ هي:

$$F: x \mapsto e^x - x + \ln(e^x - 1) + c \quad ; c \in \mathbb{R}$$

و بما أن: $F(\ln 2) = 2$ فإن: $c = \ln 2$

إذن: $F(x) = e^x - x + \ln(e^x - 1) + \ln 2$

③ حساب المساحة A :

$$\int_1^2 f(x) dx = [F(x)]_1^2$$

$$= F(2) - F(1)$$

$$= e^2 - e + \ln(e + 1) - 1$$

إذن: $A = 2(e^2 - e + \ln(e + 1) - 1) \text{ cm}^2$

"إذا توقفت عن المحاولة فستتوقف عن الإبداع..."

- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2}n\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

التمرين الثاني (08 نقطة)

$$D_f =]0; +\infty[\quad f(x) = \frac{e^{2x} + ae^x + b}{e^x + 1} \quad (I)$$

① تعيين العددين الحقيقيين a و b :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و

مشتقتها معرفة بالعلاقة:

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} + ae^x)(e^x + 1) - e^x(e^{2x} + ae^x + b)}{(e^x + 1)^2}$$

ومنه:

$$f'(x) = \frac{e^{3x} - 2e^{2x} + e^x(-a - b)}{(e^x + 1)^2} \quad (*)$$

ولدينا أيضا: $y' - e^x + \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = 0$

ومنه: $y' = e^x - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

وبالتالي: $y' = \frac{e^{3x} - 2e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$

و منه f حل للمعادلة التفاضلية معناه:

$$f'(x) = \frac{e^{3x} - 2e^{2x}}{(e^x + 1)^2} \quad (**)$$

بالمطابقة بين (*) و (**): نجد: $-a - b = 0$

و من جهة أخرى لدينا: $f(\ln 3) = \frac{7}{2}$ إذن:

$$3a + b = -2$$

وبالتالي:

$$\begin{cases} -a - b = 0 \\ 3a + b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{إذن:}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x + 1} \quad \text{نضع } a = -1 \text{ و } b = 1 \text{ أي أن: } (II)$$

① تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من

المجال $]0; +\infty[$ فإن: $f(x) = e^x - 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$