



على المترشح اختيار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول

التمرين الأول: (5.5 نقطة)

- 1) أ- عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 .
ب- حدد الأعداد الطبيعية n بحيث يكون : $(2020^{1962} \times n + 4 \times 1441^{1954}) \equiv 0[7]$
- 2) نعتبر العدد الطبيعي N_p المكتوب في النظام العشري على الشكل : $N_p = \overline{111 \dots 1}$ جزء p
أ- بين أن : $N_p \equiv p[3]$.
ب- استنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 3 .
ج- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $(3^n - 1)$ قابلا للقسمة على 2 .
د- بين أن العدد N_p يقبل القسمة على 7 إذا وفقط إذا كان العدد $(3^p - 1)$ يقبل القسمة على 7 .
هـ- استنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 7 .
- 3) أ- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x - 7y = 4$.
ب- استنتج الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة : $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ 2a \equiv 3[7] \end{cases}$.
ج- عين باقي قسمة N_{2020} على 21 .
- 4) نعتبر العدد الطبيعي M المكتوب في النظام ذي الأساس 4 على الشكل : $M = \overline{abb2a0}$
أ- عين قيم a و b علما أن : $M - 4 \equiv 0[7]$.
ب- استنتج قيم M مكتوبة في النظام العشري .

التمرين الثاني : (4.5 نقطة)

- يحتوي وعاء U على 5 كريات حمراء و 3 كريات صفراء و كريتين خضراوين . الكريات متماثلة لانفرق بينها باللمس . نسحب عشوائيا ثلاث كريات من الوعاء U في آن واحد . A ، B ، C ثلاثة أحداث حيث :
- "الحصول على ثلاث كريات حمراء" ، B "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون" C "الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى"
- 1) أحسب $p(A)$; $p(B)$; $p(C)$ احتمال الأحداث A ، B ، C على الترتيب .
 - 2) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة .
• عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي .
 - 3) نضيف $(n - 5)$ كرية حمراء إلى الوعاء U حيث $n \geq 5$ ، ثم نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع . نعتبر الحدثين D و E حيث : D "الحصول على كريتين حمراوين" E "الحصول على كريتين مختلفتين في اللون"
- أ- أثبت أن : $p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.
 - ب- أحسب بدلالة n العدد $p(E)$ احتمال الحدث E .
 - ج- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $p(E) \geq \frac{1}{2}$.

التمرين الثالث : (10 نقاط)

نعتبر من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، الدالة f_n المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بـ :

$$f_n(x) = x^n \ln(x+1)$$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. لتكن h_n الدالة المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بـ :

$$h_n(x) = \frac{x}{x+1} + n \ln(x+1)$$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة h_n .

2) أحسب $h_n(0)$ ثم استنتج إشارة $h_n(x)$ على المجال $]-1, +\infty[$.

3) نفرض أن $n = 1$

أ- برر قابلية الإشتقاق للدالة $f_1(x)$ ثم أكتب عبارة $f_1'(x)$ بدلالة $h_1(x)$.

ب- استنتج اتجاه تغير f_1 على المجال $]-1, +\infty[$.

4) ليكن n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$.

أ- أحسب نهايتي f_n عند $+\infty$ و -1

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f_n وشكل جدول تغيراتها (ميز الحالتين n زوجي و n فردي) .

5) أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن جميع المنحنيات (C_n) تشمل نقطتين ثابتتين A و B يطلب تعيينهما .

ج- أنشئ في نفس المعلم السابق (C_1) و (C_2) .

II. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$

1) أ- عين الأعداد الحقيقية $a; b; c$ بحيث من أجل كل x من المجال $[0, 1]$ فإن : $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$

ب- استنتج قيمة $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$ ثم أثبت أن : $u_1 = \frac{1}{4}$

2) أ- أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم برر تقاربها .

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0, 1]$:

$$s_n = 1 - x + \dots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k$$

أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0, 1]$:

$$s_n = \frac{1}{x+1} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{x+1}$$

ب- استنتج أن :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx$$

ج- أثبت باستعمال التكامل بالتجزئة أن : $u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \right]$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (5.5 نقطة)

I. (1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب- استنتج باقي قسمة العدد $1440^{2019^{2020}}$ على 7 .

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $3[7] \equiv (5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1) \cdot 4$.

3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2)$ مضاعفا للعدد 7.

4) نضع $n = 9$. نعتبر x و y عددين صحيحين ولتكن المعادلة : $(E) \quad C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \dots$

أ- أثبت أن المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{Z}^2$.

ب- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 0[5]$ ، ثم حل المعادلة (E) .

5) أ- إذا كان x و y عددين طبيعيين ، فما هي القيم الممكنة لـ $pgcd(x; y) = d$.

ب- عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون العددين x و y أوليان فيما بينهما .

II. نعتبر المعادلة $(E') \quad 343x - 648y = 76 \dots$ حيث x و y عددين طبيعيين .

1) تحقق أن الثنائية $(4, 2)$ حل للمعادلة (E') ثم عين حلولها في $\mathbb{N}^2$.

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1 \alpha \beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\overline{\alpha 1 \alpha \alpha \beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 .
جد العددين α و β ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 .

التمرين الثاني : (6.5 نقطة)

❖ لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{1}{\alpha}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt[n]{u_n}$ حيث α عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي α أكبر تماما من 1 : $\sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$.

2) برهن باستعمال البرهان التراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{\alpha} \leq u_n < 1$.

3) أحسب u_1 ثم برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4) علل لماذا المتتالية (u_n) متقاربة ؟

❖ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n)$.

1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول .

2) استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3) ليكن الجداء $p_n = \sqrt[n]{\frac{1}{u_1}} \times \sqrt[n]{\frac{1}{u_2}} \times \dots \times \sqrt[n]{\frac{1}{u_n}}$.

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $p_n = \alpha^{\left(\frac{1-\alpha^{-n}}{(\alpha-1)n}\right)}$.

4) أحسب الجداء التالي : $T_n = e^{v_0^2} \times e^{v_1^2} \times \dots \times e^{v_n^2}$.

فيما يلي نضع $\alpha = 2$

5) تحقق أن: $T_n = e^{-\frac{\ln^2(2)(4^{-n}-4)}{3}}$. استنتج أن (T_n) متقاربة يطلب تعيين نهايتها.

6) أحسب بدلالة n المجموع:

$$s_n = \log(e^{v_1}) + \log\left(\frac{e^{v_2}}{2}\right) + \log\left(\frac{e^{v_3}}{3}\right) + \dots + \log\left(\frac{e^{v_n}}{n}\right)$$

التمرين الثالث: (8 نقاط)

m عدد حقيقي غير معدوم f_m الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f_m(x) = 2x + 3 - (x + 1)e^{mx}$$

(C_m) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ. نضع $m = 1$

1) أحسب $f_1'(x)$ و $f_1''(x)$ ثم أدرس تغيرات الدالة f_1' وشكل جدول تغيراتها.

2) أحسب $f_1'(0)$ ثم استنتج إشارة $f_1'(x)$.

3) أدرس تغيرات الدالة f_1 وشكل جدول تغيراتها.

4) أ- بين أن المنحني (C_1) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ب- ادرس وضعية (C_1) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

5) أ- بين أن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $0.92 < \alpha < 0.93$ و $-1.55 < \beta < -1.56$

ب- جد معادلة المماس (T) للمنحني (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ج- أنشئ (T) ، (Δ) ، (C_1) .

6) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة α المساحة $S(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_1) والمستقيمت

التي معادلاتها: $x = 0$; $x = \alpha$; $y = 2x + 3$.

ب- بين أن: $S(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 3\alpha}{\alpha + 1}$ ثم عين حصرا للعدد $S(\alpha)$.

II. نفرض أن m كفي.

1) بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين يطلب تعيين إحداثي كل منهما.

2) بين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لجميع المنحنيات (C_m) عند $-\infty$ ثم ادرس وضعية (C_m) بالنسبة للمستقيم

(Δ) .

3) n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

نضع $f_m^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f_m .

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2:

$$f_m^{(n)}(x) = -m^{n-1}e^{mx}(mx + m + n)$$

انتهى الموضوع الثاني

تمنيتي لكم النجاح في البكالوريا

اذن

$$N_p = 1 + 1 + \dots + 1 [3]$$

ومنه $N_p = p[3]$ و (ب) استنتاج باقي قسمته N_{2020} على 3

لدينا $N_{2020} \equiv 1[3]$ و $N_{2020} \equiv 1[3]$

ومنه $N_{2020} \equiv 1[3]$ اذن باقي قسمته N_{2020} على 3 هو 1

ج- ابيات ان $3^n - 1 \equiv 0[2]$ لدينا $3 \equiv 1[2]$ ومنه $3^n \equiv 1[2]$ اذن

(د) ابيات ان $3^n - 1 \equiv 0[2]$ لدينا $N_p \equiv 0[7]$ اذ $(3^p - 1) \equiv 0[7]$

لدينا $N_p \equiv d[7]$ مقده $10 + 10 + \dots + 10 \equiv 0[7]$

فما ان $10 \equiv 3[7]$ فان $3 + 3 + \dots + 3 + 1 \equiv 0[7]$

لدينا $\frac{3^p - 1}{2} = 1 + 3 + \dots + 3^{p-1}$ (مجموع حدود متساوية هندسية أساسها 3 وقوة 1 الأول)

ومنه $2N_p \equiv -(3^p - 1)[7]$

نفرض ان $N_p \equiv 0[7]$ ومنه $N_p = 7\alpha$

حي $3^p - 1 = 14\alpha$ مقده $\frac{3^p - 1}{2} = 7\alpha$

اذن العدد $(3^p - 1)$ يقبل القسمة على 7

نفرض ان $3^p - 1 \equiv d[7]$ و $3^p - 1 \equiv d[7]$

$(3^p - 1)$ يقبل القسمة على 7 فان $(3^p - 1)$

يقبل القسمة على 14 و $3^p - 1 = 14\beta$

ومنه $\frac{3^p - 1}{2} = 7\beta$ و $N_p \equiv 0[7]$

ومنه المطلوب ه- استنتاج باقي قسمته N_{2020} على 7

لدينا $N_{2020} \equiv \frac{3^{2020} - 1}{2} [7]$ و $N_{2020} \equiv (3 - 1) [7]$

الموضوع 1

المحكمة (5, 5)

ك- بواقي قسمته 3^n على 7

$3^0 \equiv 1[7], 3^1 \equiv 3[7], 3^2 \equiv 2[7], 3^3 \equiv 6[7], 3^4 \equiv 4[7], 3^5 \equiv 5[7]$

ومنه بواقي قسمته 3^n على 7 دورية و دورها 6

وبالتالي من اجل كل عدد طبيعي k لدينا

n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
بواقي قسمته 3^n على 7	1	3	2	6	4	5

ب- تحديد n حتى يكون

(1) $(2020^{1962} \times n + 4 \times 1441^{1954}) \equiv 0[7]$

لدينا $2020 \equiv -3[7]$ ومنه $2020 \equiv 4[7]$

$2020^{1962} \equiv (-3)^{1962} [7]$

ومنه $2020^{1962} \equiv 3^{1962} [7]$

ولدينا $1962 = 6 \times 327$

ومنه $3^{1962} \equiv 1[7]$

اذن $2020^{1962} \equiv 1[7]$

ولدينا $1441 \equiv 6[7]$ ومنه $1441 \equiv -1[7]$

$1441^{1954} \equiv (-1)^{1954} [7]$

ومنه $1441^{1954} \equiv 1[7]$

ب- $n + 4 \equiv [7]$

حي $n \equiv 3[7]$ و $n \equiv -4[7]$

معه $n = 6k + 1$

(2) $N_p = \underbrace{111\dots1}_p$

ا- ابيات ان $N_p \equiv p[3]$

لدينا $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10 + 10^0$

و $10 \equiv 1[3]$ ومنه $10^{p-1} \equiv 1[3]$

و $10^{p-2} \equiv 1[3]$ و $10 \equiv 1[3]$

$$3^{2020} = 6 \times 336 + 4 \text{ وليسا } 3^{2020} \equiv 4 \pmod{3}$$

$$3^{2020} \equiv 4 \pmod{7} \text{ وليسا}$$

$$2N_{2020} \equiv (4-1) \pmod{7}$$

$$2N_{2020} \equiv 3 \pmod{7}$$

$$8N_{2020} \equiv 12 \pmod{7} \text{ وليسا}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \equiv 1 \pmod{7} \\ 12 \equiv 5 \pmod{7} \end{pmatrix} N_{2020} \equiv 5 \pmod{7}$$

اذن باقي قسمته العدد N_{2020} على 7 هو 5

$$(P) \text{ حل في } \mathbb{Z}^2 \text{ للمعادلة } 3x - 7y = 4$$

$$3x - 7y = 4 \text{ وليسا } 3x \equiv 4 \pmod{7} \text{ وليسا}$$

$$15x \equiv 20 \pmod{7}$$

$$20 \equiv 6 \pmod{7} \text{ وليسا } 15 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$x \equiv 6 \pmod{7} \text{ وليسا } x \equiv 6 \pmod{7} \text{ وليسا}$$

$$x = 7k + 6 \text{ وليسا}$$

$$y = 3k + 2$$

هذه حلول المعادلة

$$(x, y) = (7k + 6, 3k + 2) \mid k \in \mathbb{Z}$$

استنتاج الاعداد الصحيحة a التي

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{3} \\ 8a \equiv 12 \pmod{7} \end{cases} \text{ وليسا}$$

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{3} \\ a \equiv 5 \pmod{7} \end{cases} \text{ وليسا}$$

$$3U + 1 = 7V + 5$$

$$3U - 7V = 4$$

$$V = 3K + 2 \text{ وليسا } U = 7K + 6$$

$$a = 3(7K + 6) + 1$$

$$a = 21K + 19 \mid K \in \mathbb{Z}$$

لغرض باقي قسمته N_{2020} على 21

$$\begin{cases} N_{2020} \equiv 1 \pmod{3} \\ N_{2020} \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \text{ وليسا}$$

$$\begin{cases} 2N_{2020} \equiv 10 \pmod{7} \\ N_{2020} \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

$$N_{2020} \equiv 1 \pmod{3} \text{ وليسا}$$

$$2N_{2020} \equiv 3 \pmod{7}$$

$$N_{2020} = 21K + 19$$

اذن باقي N_{2020} على 19 هو 19

$$M = abba0 \text{ وليسا}$$

$$M - 4 \equiv 0 \pmod{7} \text{ وليسا}$$

$$M = a \cdot 4^5 + b \cdot 4^4 + b \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + a \cdot 4$$

$$0 \leq b < 4 \text{ وليسا } 0 < a < 4$$

$$4 \equiv -3 \pmod{7} \text{ وليسا}$$

$$M - 4 \equiv a(-3)^5 + b(-3)^4 + b(-3)^3 + 2(-3)^2 + a(-3) - 4 \pmod{7}$$

$$M - 4 \equiv -a \cdot 3^5 + b \cdot 3^4 - b \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3a - 4 \pmod{7}$$

$$3^5 \equiv 5 \pmod{7} \text{ وليسا } 3^4 \equiv 4 \pmod{7} \text{ وليسا } 3^3 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$3^2 \equiv 2 \pmod{7} \text{ وليسا } 3^1 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$M - 4 \equiv -5a + 4b - 6b + 4 - 3a - 4 \pmod{7}$$

$$M - 4 \equiv -8a - 2b \pmod{7}$$

$$-8a - 2b \equiv 0 \pmod{7} \text{ وليسا}$$

$$-a - 2b \equiv 0 \pmod{7}$$

$$a + 2b \equiv 0 \pmod{7} \text{ وليسا}$$

$$a \in \{1, 2, 3\} \text{ وليسا } 0 < a < 4$$

$$2b \equiv -1 \pmod{7} \text{ وليسا } 1 + 2b \equiv 0 \pmod{7} \text{ وليسا } a = 1$$

$$b \equiv 3 \pmod{7} \text{ وليسا } 2b \equiv 6 \pmod{7} \text{ وليسا}$$

$$b \equiv 3 \pmod{7} \text{ وليسا } 0 \leq b < 4$$

$$2b \equiv 5 \pmod{7} \text{ وليسا } 2 + 2b \equiv 0 \pmod{7} \text{ وليسا } a = 2$$

$$8b \equiv 20 \pmod{7} \text{ وليسا}$$

$$0 \leq b < 4 \text{ وليسا } b \equiv 6 \pmod{7} \text{ وليسا}$$

$$2b \equiv 4 \pmod{7} \text{ وليسا } 3 + 2b \equiv 0 \pmod{7} \text{ وليسا } a = 3$$

حساب الأمل الرياضي

$$E(X) = 1 \cdot \frac{11}{120} + 2 \cdot \frac{79}{420} + 3 \cdot \frac{30}{120} = \frac{259}{120}$$

$$n+5 = n \text{ خراف} + 3 \text{ خراف} + 2 \text{ خراف} = n+5$$

سحب كرتين على التوالي دون إرجاع

"D" الحصول على كرتين خراف

$$P(D) = \frac{n(n-1)}{(n+3)(n+4)}$$

لدينا عدد الحالات الممكنة

$$A_{n+5}^2 = \frac{(n+5)!}{(n+5-2)!} = \frac{(n+5)!}{(n+3)!} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{(n+3)!} = (n+5)(n+4)$$

$$P(D) = \frac{A_n^2}{(n+5)(n+4)} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

"E" حساب بدلة n

"E" الحصول على كرتين مختلفتين اللون

$$P(E) = \frac{2A_n^1 \times A_3^1 + 2A_n^1 \times A_2^1 + 2A_2^1 \times A_3^1}{(n+5)(n+4)}$$

$$= \frac{6n + 4n + 12}{(n+5)(n+4)} = \frac{10n+12}{n^2+9n+20}$$

"E" تعيين قيم العدد المسموح n بحيث:

$$P(E) \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{10n+12}{n^2+9n+20} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 10n+12 \geq \frac{1}{2}(n^2+9n+20)$$

$$10n+12 - \frac{1}{2}(n^2+9n+20) \geq 0$$

$$2(n^2+9n+20) > 0 \Rightarrow n^2+9n+20 > 0$$

$$n \in \left[\frac{11-\sqrt{137}}{2}, \frac{11+\sqrt{137}}{2} \right]$$

$$n \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$b=2(3) \text{ و } 4 \leq b < 4$$

فان $b=2$ استخرج M مكتوبة في النظام

$$a=1 \text{ و } b=3$$

$$M = 133210 = 2020$$

$$M = 322230 = 3756$$

$$U = 5R + 3J + 2V$$

سحب 3 كرات في آن واحد

"A" الحصول على 3 كرات خراف

$$P(A) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

"B" الحصول على 3 كرات من نفس اللون

$$P(B) = \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$$

"C" الحصول على 3 كرات مختلفة اللون

$$P(C) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

"X" متغير عشوائي يوفق لكل نتيجة

عدد ألوان الكرات المسحوبة

تدقيق قانون الإحصاء X

$$P(X=1) = P(B) = \frac{11}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 \times (C_3^1 + C_2^1) + C_3^2 \times (C_5^1 + C_2^1) + C_2^2 \times C_5^1}{C_{10}^3}$$

$$= \frac{50 + 21 + 8}{120} = \frac{79}{120}$$

$$P(X=3) = \frac{30}{C_{10}^3} = \frac{1}{4}$$

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$11/120$	$79/120$	$30/120$

$$\lim_{n \rightarrow -1} f_n(x) = \begin{cases} -\infty & : \text{زوجي } n \\ +\infty & : \text{فردى } n \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \quad / \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty \end{cases}$$

(٢) f_n قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ وبالتالى المستمرة

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n x^{n-1} \ln(n+1) + \frac{x^n}{x+1} \\ &= x^{n-1} \left(n \ln(n+1) + \frac{x}{n+1} \right) \\ &= x^{n-1} \cdot h_n(x) \end{aligned}$$

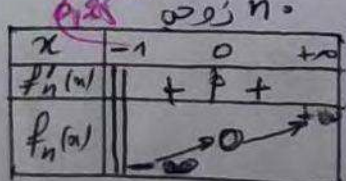
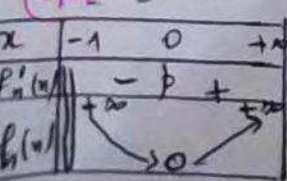
(٣) حالة n زوجي $(n-1)$ فردى وبالتالى

x	-1	0	$+\infty$
x^{n-1}	-	0	+
$h_n(x)$	-	0	+
$f'_n(x)$	+	0	+

ومن ثم f_n متزايدة على $]-1, +\infty[$ وفى حالة n فردى فإن $(n-1)$ زوجى وبالتالى

x	-1	0	$+\infty$
x^{n-1}	+	0	+
$h_n(x)$	-	0	+
$f'_n(x)$	-	0	+

ومن ثم f_n متناقصة على $]-1, 0[$ ومتزايدة على $[0, +\infty[$ جدول التغيرات n فردى



المفرد ٥٣ : (١٠ دقائق)

$$f_n(x) = x^n \ln(n+1) \quad / \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$D_{f_n} =]-1, +\infty[\quad n \in \mathbb{N}^* - \mathbb{I}$$

$$h_n(x) = \frac{x}{n+1} + n \ln(n+1) \quad / \quad D_h =]-1, +\infty[$$

(١) دراسة اتجاه تغير h_n

h_n قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ وبالتالى المستمرة

$$h'_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n}{n+1}$$

من أجل $x \in]-1, +\infty[$ لدينا

$$h'_n(x) > 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \quad \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

فإن h_n متزايدة تماماً على $]-1, +\infty[$

$$h_n(0) = 0 \quad (2)$$

إشارة h_n

بما أن h_n متزايدة تماماً على $]-1, +\infty[$

و $h_n(0) = 0$ فإن إشارة h_n كالآتى

x	-1	0	$+\infty$
$h_n(x)$	-	0	+

(٣) نقرض أن $n=1$ $f_1(x) = x \ln 2$

(٢) الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$

لأنها حيدة والتى قابلية للاشتقاق على $]-1, +\infty[$

عبارة $f'_1(x)$ بدلالة $h_1(x)$

من أجل كل x من $]-1, +\infty[$ لدينا

$$f'_1(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} = h_1(x)$$

(٢) إشارة $f'_1(x)$ من إشارة $h_1(x)$

وبالتالى f_1 متناقصة على $]-1, 0[$ ومتزايدة على $[0, +\infty[$

(٣) $n \geq 3$

(٢) حساب نهاية f_n

(5) إثبات أن $\int_0^1 \frac{x^2}{n+1} dx$ قيمة

$$\int_0^1 \frac{x^2}{n+1} dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{n+1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{n+1} x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln 2$$

اثبات أن $U_n = \frac{1}{4}$

$$U_n = \int_0^1 x \ln(n+1) dx$$

تفحص $U'(n) = \frac{1}{n+1}$ و $U(n) = \ln(n+1)$

و $V'(n) = x$ و $V(n) = \frac{1}{2} x^2$ وبالتالي

$$U_n = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(n+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{n+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2) - 0 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{4}$$

(6) إثبات أن (U_n) متناقصة وتبتعد

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(n+1) dx - \int_0^1 x^n \ln(n+1) dx$$

$$= \int_0^1 x^n (x-1) \ln(n+1) dx$$

لدينا $x \in [0, 1]$: $x-1 \leq 0$ و $x^n \geq 0$

و $\ln(n+1) > 0$ و

$$\int_0^1 x^n (x-1) \ln(n+1) dx \leq 0$$

و (U_n) متناقصة

(5) إثبات أن $\int_0^1 \frac{x^2}{n+1} dx$ قيمة
معروفة فاه جميع المتغيرات (C_n) تتغير
تقريباً ثابتاً A و B يظلان ثابتين
لذلك n و n' عددان متتابعان غير
مقنومين وليكن $M(n, y)$ نقطة
من المستوي

لدينا $M \in (C_n) \cap (C_{n'})$ فاه

$M \in (C_n)$

$M \in (C_{n'})$

$$x^n \ln(n+1) = x^{n'} \ln(n+1)$$

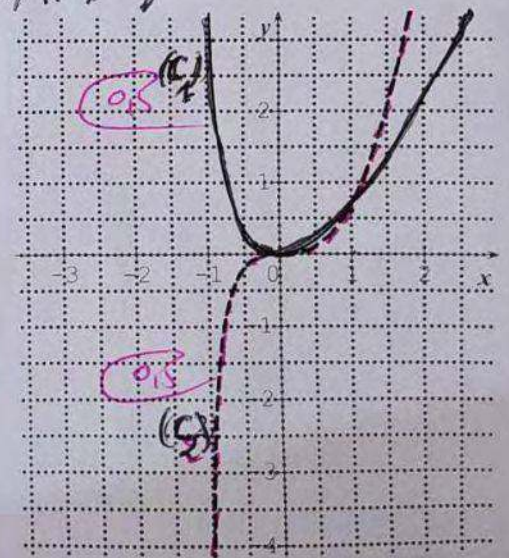
$$\ln(n+1) (x^n - x^{n'}) = 0$$

وبالتالي $\ln(n+1) = 0$ أو $x^n - x^{n'} = 0$

وهو $x=0$ أو $n=1$

اذن جميع المتغيرات (C_n) تتغير

تقريباً ثابتاً $A(0, 0)$ و $B(1, \ln 2)$



II. متتالية عددية معرفة على N^*

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(n+1) dx$$

(6) إثبات أن a, b, c حدود متتالية $x \in [0, 1]$

$$\frac{x^2}{n+1} = a + b + \frac{c}{n+1}$$

بإستخدام المطابقة $a=1, b=-1, c=1$

$$S_n = 1 - \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)} \quad (0.1)$$

$$= \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1 + x} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{1+x}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$\int_0^1 S_n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k x^k dx$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \left[\frac{1}{k+1} x^{k+1} \right]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} (1-0) \quad (0.2)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$$

و هو المطلوب

$$\int_0^1 S_n dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$= \left[\ln(1+x) \right]_0^1 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$= \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left[\ln 2 - (1 - \ln 2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}) \right]$$

$$U'(u) = \frac{1}{n+1} \text{ و } U(u) = \ln 2$$

$$V(u) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \text{ و } V'(u) = x^n$$

$$U_n = \frac{1}{n+1} \left[x^{n+1} \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} (-1)^{n+1} \left[\ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right]$$

$$= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left(\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \right)$$

لدينا متسلسلة كل x في $[0,1]$

$$\ln(n+1) > 0 \text{ و } x^n > 0$$

$$(0.2) x^n \ln(n+1) > 0$$

وبالتالي متسلسلة كل x عدد طبيعي غير صفري

$$U_n > 0 \text{ و } \int_0^1 x^n \ln(n+1) dx > 0$$

ومن (U_n) متسلسلة من الأسفل وما أبقا

متسلسلة متقاربة

(U) باليات في متسلسلة كل عدد طبيعي

عبر مجموع n فـ $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

$$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

لدينا متسلسلة كل x في $[0,1]$

$$0 \leq \ln(n+1) \leq \ln 2 \text{ و } 0 \leq x^n \leq 1$$

$$(0.3) 0 \leq x^n \ln(n+1) \leq (\ln 2) x^n$$

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(n+1) dx \leq \ln 2 \int_0^1 x^n dx$$

$$0 \leq U_n \leq \ln 2 \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

وهو المطلوب

استنتاج $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$

$$(0.2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \text{ و } 0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

$$x \in [0,1] \text{ و } n \geq 2 \quad (3)$$

$$S_n = 1 - n + \dots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$$

$$S_n = \frac{1}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1}$$

المسألة ٢٠ (٥, ٥ نقطة)

I. (١) بواقى خمسة ٥ على ٧

$$5^4 \equiv 2[7], 5^3 \equiv 6[7], 5^2 \equiv 4[7], 5^1 \equiv 5[7], 5^0 \equiv 1[7]$$

$$5^6 \equiv 1[7], 5^5 \equiv 3[7]$$

ومن ثم بواقى خمسة ٥ على ٧ دورية ودورها ٦ وبالتالي من أجل كل عدد صحيح k

k	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقى ٥ على ٧	١	٥	٤	٦	٢	٣

II. استنتاج باقى خمسة العدد ٢٠١٩

$$1440 \equiv 5[7] \text{ لذا } 1440 \equiv 5[7]$$

$$1449 \equiv 5[7]$$

$$2019 \equiv 3[7]$$

$$2020 \equiv 3[7]$$

$$2021 \equiv 3[7]$$

$$2022 \equiv 3[7]$$

$$2023 \equiv 3[7]$$

$$2024 \equiv 3[7]$$

$$2025 \equiv 3[7]$$

$$2026 \equiv 3[7]$$

$$2027 \equiv 3[7]$$

$$2028 \equiv 3[7]$$

$$2029 \equiv 3[7]$$

$$2030 \equiv 3[7]$$

$$2031 \equiv 3[7]$$

$$2032 \equiv 3[7]$$

$$2033 \equiv 3[7]$$

$$2034 \equiv 3[7]$$

$$2035 \equiv 3[7]$$

$$2036 \equiv 3[7]$$

$$2037 \equiv 3[7]$$

$$2038 \equiv 3[7]$$

$$2039 \equiv 3[7]$$

III. نكتب مع العدد الطبيعي n الى من اجلها

$$2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$$

$$\lambda = \overline{\alpha^4 \alpha \beta^7} \text{ و } \lambda = \overline{\beta^4 \beta \alpha^7} \quad (2)$$

$$0 < \beta \leq 4 \text{ و } 0 < \alpha \leq 4$$

$$\overline{\beta^4 \beta \alpha^7} = \beta \cdot 7^3 + 7^2 + \alpha \cdot 7 + \beta$$

$$\overline{\alpha^4 \alpha \beta^7} = \alpha \cdot 5^4 + 5^3 + \alpha \cdot 5^2 + \alpha \cdot 5 + \beta$$

$$625\alpha + 125 + 25\alpha + 5\alpha + \beta = 343\beta + 49 + 7\alpha + \beta$$

$$648\alpha - 343\beta = -76$$

$$343\beta - 648\alpha = 76$$

$$\alpha = 343k + 2 \text{ و } \beta = 648k + 4$$

$$0 < \beta \leq 4 \text{ و } 0 < \alpha \leq 4$$

نلاحظ ان $\beta = 4$ و $\alpha = 2$ هي
حالتان (3) في نظام العداد ذي الاساس 7.

$$\lambda = 4124$$

$$= 7^3 \cdot 4 + 7^2 + 7 \cdot 2 + 4 = 1439$$

$$\begin{array}{r} 1439 \overline{) 6} \\ 5 \overline{) 239} \overline{) 6} \\ 5 \overline{) 39} \overline{) 6} \overline{) 6} \\ 3 \overline{) 6} \overline{) 6} \overline{) 6} \\ 0 \overline{) 1} \overline{) 6} \\ 1 \overline{) 0} \end{array}$$

$$d = 10355$$

المسألة (6, 7)

$$\alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{N}^* \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{1}{\alpha} \\ u_{n+1} = \sqrt[n]{u_n} \end{array} \right. *$$

نلاحظ ان u_n متناقص لكل عدد طبيعي n .

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$$

$$0 < \frac{1}{\alpha} < 1 \text{ و } \alpha > 1$$

$$\frac{1}{\alpha} > \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$$

$$x = 44k + 15 \text{ في } (E)$$

$$(n, y) = (44k + 15, 15k + 5) \text{ و } x \text{ و } y \text{ عددين طبيعيين}$$

$$PGCD(n, y) = 1$$

$$d = PGCD(n, y)$$

$$\left. \begin{array}{l} d \mid x \\ d \mid y \end{array} \right\} \begin{array}{l} d \mid 15 \\ d \mid 5 \end{array}$$

$$d \in \{1, 5\}$$

(ب) نحسب القيمات (n, y) حلول (E) حيث يكون n و y عددين طبيعيين.
ندرس من اجل $d = 5$

$$44k + 15 = 5d \text{ و } 15k + 5 = 5d$$

$$4k = 5d - 15 \text{ و } 3k = 5d - 5$$

$$k \in \mathbb{N} / k = 5\alpha \text{ و } k = d(5)$$

$$k = 5\alpha \text{ و } d = 5$$

$$k \neq 5\alpha \text{ و } d = 1$$

$$k \neq 5\alpha \text{ و } (n, y) = (44k + 15, 15k + 5)$$

$$(E') - 343x - 648y = 76$$

$$(E) \text{ التحقق من ان } (4, 2) \text{ حل للمعادلة}$$

$$343 \cdot 4 - 648 \cdot 2 = 76$$

$$(E') - 76$$

نحسب الحلول في $\mathbb{N}^2$.

$$343x - 648y = 76$$

$$343(4) - 648(2) = 76$$

$$343(x-4) = 648(y-2)$$

$$PGCD(343, 648) = 1 \text{ و } 343 \mid 648(y-2)$$

$$y = 343k + 2$$

$$x = 648k + 4 \text{ في } (E')$$

$$(n, y) = (648k + 4, 343k + 2)$$

$$k \in \mathbb{N}$$

تقریباً $U_n > U_{n+1}$ و نیز $U_n > U_{n+1}$

$$U_{n+2} > U_{n+1}$$

لدينا $U_n > U_{n+1}$ و $\sqrt[n]{U_{n+1}} > \sqrt[n]{U_n}$

و نیز $U_{n+2} > U_{n+1}$ و $\sqrt[n]{U_{n+2}} > \sqrt[n]{U_{n+1}}$

اذاً من أجل كل عدد صحيح n $U_{n+1} > U_n$ و (U_n) متزايدة

لدينا $U_n < 1$ و U_n متناهية (محدودة) من الأعلى و (U_n) متزايدة متناهية من الأسفل

$$V_n = \ln(U_n)$$

(1) اياتان (V_n) هذسية $V_{n+1} = \ln(U_{n+1})$

$$= \ln(\sqrt[n]{U_n}) = \ln(U_n)^{1/n} = \frac{1}{n} \ln U_n$$

$$= \frac{1}{n} V_n$$

و (V_n) هذسية $V_0 = \ln U_0 = \ln(1/\alpha)$

(2) عبارة U_n : لدينا $V_n = (\frac{1}{\alpha})^n \cdot \ln(1/\alpha)$

و $U_n = e^{V_n} = e^{(\frac{1}{\alpha})^n \ln(1/\alpha)}$ و $U_n = e^{(\frac{1}{\alpha})^n \ln(1/\alpha)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0 \text{ إذا } 0 < \frac{1}{\alpha} < 1$$

$$P_n = \sqrt[n]{\frac{1}{U_1}} \times \sqrt[n]{\frac{1}{U_2}} \times \dots \times \sqrt[n]{\frac{1}{U_n}}$$

$$P_n = \alpha^{\frac{(1-\alpha^n)}{(1-\alpha)}}$$

$$P_n = \sqrt[n]{\frac{1}{U_1} \times \frac{1}{U_2} \times \dots \times \frac{1}{U_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n}}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$$

أو $\sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$ وهو المطلوب

(2) اياتان $\frac{1}{\alpha} \leq U_n < 1$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0 = \frac{1}{\alpha}$

$$\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} < 1$$

أو $\frac{1}{\alpha} \leq U_0 < 1$ اذن الخاصية

مكفوفة من أجل $n=0$

تفرض أن $\frac{1}{\alpha} \leq U_n < 1$ و نبرهن

$$\frac{1}{\alpha} \leq U_{n+1} < 1$$

لدينا

$$\frac{1}{\alpha} \leq U_n < 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} \leq \sqrt[n]{U_n} < 1$$

$$\frac{1}{\alpha} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} \leq U_{n+1} < 1$$

$$\frac{1}{\alpha} \leq U_{n+1} < 1$$

اذن من أجل كل عدد صحيح n

$$\frac{1}{\alpha} \leq U_n < 1$$

(3) U_n حساب

$$U_1 = \sqrt[n]{U_0} = \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}}$$

اياتان (U_n) متزايدة متناهية من الأعلى بالتتابع أي شئت اذ من أجل كل

عدد صحيح $U_{n+1} > U_n$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0 = \frac{1}{\alpha}$ و $U_1 = \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}}$

و $U_1 > U_0$ أي $\sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$ و $U_1 > U_0$ و $U_1 > U_0$ و $U_1 > U_0$

اذن الخاصية مكفوفة من أجل $n=0$

$$T_n = e^{-\frac{\ln(2)(4^n - 4)}{3}} \quad \alpha = 2 \quad \text{geometric series (5)}$$

$$T_n = e^{-\frac{4 \ln^2(\frac{1}{2}) \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{2n+2}}{2^2 - 1}}{3}}$$

$$= e^{-\frac{4 \ln^2(2) \cdot \frac{1 - 2^{-2n-2}}{3}}{3}}$$

$$= e^{-\frac{\ln^2(2) \cdot \frac{4^n - 1}{3} \cdot 4}{3}}$$

$$= e^{-\frac{\ln^2(2) \cdot \frac{4^n - 4}{3}}{3}}$$

or take (T_n) as geometric series.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\ln^2(2) \cdot \frac{4^n - 4}{3}}{3}} = e^{-\frac{4 \ln^2 2}{3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n = \infty$$

or take (T_n) as

$$S_n = \log(e^{v_1}) + \log(e^{v_2}) + \dots + \log(e^{v_n})$$

$$= \log\left(e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n}\right)$$

$$= \log\left(\frac{e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n}}{1 \times 2 \times \dots \times n}\right)$$

$$= \log\left(\frac{e^{v_1 + v_2 + \dots + v_n}}{n!}\right)$$

$$= \log\left(\frac{e^{v_n \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}}}{n!}\right) \quad \left| \begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ q = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$= \log\left(\frac{e^{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}}}{n!}\right) = \log\left(\frac{e^{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}}}}{n!}\right)$$

$$= \sqrt[n]{\frac{1}{e^{\left(\frac{1}{2}\right)^1 \ln\left(\frac{1}{2}\right)} \times e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{2}\right)} \times \dots \times e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(\frac{1}{2}\right)}}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{e} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{e} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}\right)}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{-\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1 - 2^{-n}}{2 - 1}}{e}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{(\ln 2) \cdot \frac{1 - 2^{-n}}{2 - 1}}{e}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{\ln 2 \cdot \frac{1 - 2^{-n}}{2 - 1}}{e}} = \sqrt[n]{\frac{1 - 2^{-n}}{2 - 1}} = \sqrt[n]{\frac{1 - 2^{-n}}{1}} = 1$$

$$T_n = e^{v_0^2} \times e^{v_1^2} \times \dots \times e^{v_{n-1}^2} \quad (4)$$

$$= e^{v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2}$$

$$= e^{v_0^2 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{2(n+1)}}{1 - (\frac{1}{2})^2}}$$

$$= e^{\ln^2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{2n+2}}{2^2 - 1}}$$

$$= e^{\ln^2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{2n+2}}{2^2 - 1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2$$

١) إذا كانت f_m دالة مستمرة على $[a, b]$ فإنها قابلة للتكامل على $[a, b]$

و m و m' عددان حقيقيان

فإن $M(n, y)$ تكون

$$y = f_m(n) \quad \text{مع } M(n, y)$$

$$y = f_m(n)$$

$$2n+3 - (n+1)e = 2n+3 - (n+1)e^{m/n}$$

$$(n+1)e^{m/n} - (n+1)e^{m/n} = 0$$

$$(n+1)(e^{m/n} - e^{m/n}) = 0$$

$$e^{m/n} = e^{m/n} \quad \text{و } n+1=0$$

وإذا كانت f_m دالة مستمرة على $[a, b]$ فإنها قابلة للتكامل على $[a, b]$

١) $(-1, 1)$ و $(0, 2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_m(n) - y = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)e^{m/n} = 0$$

وإذا كانت f_m دالة مستمرة على $[a, b]$ فإنها قابلة للتكامل على $[a, b]$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f_m(n) - y$		+	-
الوضع	قوف	(٠)	(٠)
المنحني	(٠)	(٠)	(٠)

٢) عدد حقيقي m من أجل أن تكون f_m دالة مستمرة على $[a, b]$

$$f_m(n) = m^{n-1} e^{m/n} (mn+m+n)$$

وإذا $n=2$ فإن

$$f_m(n) = f_m''(n)$$

$$f_m'(n) = 2 - (1 \cdot e^{m/n} + m e^{m/n} (n+1))$$

$$= 2 - e^{m/n} (mn+m+1)$$

$$f_m''(n) = -m e^{m/n} (mn+m+1) - m e^{m/n}$$

$$= -m e^{m/n} (mn+m+2)$$

وإذا $m=2$ فإن

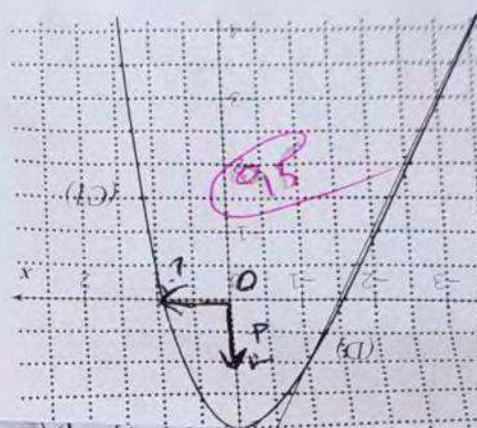
$$-m e^{m/n} (mn+m+2) = -2 e^{2/n} (2n+2+2)$$

وإذا كانت f_m دالة مستمرة على $[a, b]$ فإنها قابلة للتكامل على $[a, b]$

$$f_m(n) = -m e^{m/n} (mn+m+1)$$

$$f_m(n) = -m e^{m/n} (mn+m+1)$$

$$= -m e^{m/n} (mn+m+1)$$



S(a)

$$= \int_0^a (n+1) e^n dn$$

$$u'(n) = 1 \quad \text{و } u(n) = n+1$$

$$v(n) = e^n \quad \text{و } v'(n) = e^n$$

$$S(a) = \left[(n+1) e^n \right]_0^a - \int_0^a e^n dn$$

$$= (a+1) e^a - 1 - e^a + 1$$

$$S(a) = a e^a \quad (u.a.)$$

$$S(a) = \frac{2a^2+3a}{a+1}$$

وإذا كانت f_m دالة مستمرة على $[a, b]$ فإنها قابلة للتكامل على $[a, b]$

$$2a+3 - (a+1)e^a = 0 \quad \text{مع } f_m(a) = 0$$

$$e^a = \frac{2a+3}{a+1}$$

$$S(a) = \frac{2a^2+3a}{a+1} \quad \text{و } S(a) = a \cdot \frac{2a+3}{a+1}$$

وإذا كانت f_m دالة مستمرة على $[a, b]$ فإنها قابلة للتكامل على $[a, b]$

$$0.92 < a < 0.93$$

$$0.92+1 < a+1 < 0.93+1$$

$$1.92 < (a+1) < 1.93$$

$$\frac{1}{1.93} < \frac{1}{a+1} < \frac{1}{1.92}$$

$$2(0.92)^2 + 3(0.92) < 2a^2 + 3a < 2(0.93)^2 + 3(0.93)$$

$$\frac{2(0.92)^2 + 3(0.92)}{1.93} < \frac{2a^2 + 3a}{a+1} < \frac{2(0.93)^2 + 3(0.93)}{1.92}$$

$$1.93 < S(a) < 1.92$$

وإذا كانت f_m دالة مستمرة على $[a, b]$ فإنها قابلة للتكامل على $[a, b]$

II. نقرض m كقيمة