

الوظيفة المنزلية رقم 05 في مادة الرياضيات

سلمت يوم:

تعاون يوم:

التمرين الأول: (13 نقطة)

f ، g و h الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{R} - \{-2\}$ و $\mathbb{R}$ (على التوالي) بـ:

$$f(x) = x^2 - 6x + 7 \quad g(x) = 3 - \frac{1}{x+2} \quad h(x) = |1 - 2x|$$

(C_f) ، (C_g) و (C_h) منحنياتها البيانية (على التوالي) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (P) هو القطع المكافئ الممثل للدالة $x \mapsto x^2$ و (H) هو القطع الزائد الممثل للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$.

- I. (1) عَيِّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = (x+a)^2 + b$.
- (2) ادرس اتجاه تغير f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) بَيِّن أن (C_f) هو صورة (P) بانسحاب يطلب تعيين شعاعه $\vec{u}$ ، ثم أنشئ (C_f) .
- (4) m عدد حقيقي ، حل بيانيا المعادلتين : (1) : $f(x) = -2$ (2) : $f(x) = m$ ، تأكد جبريا من حلول المعادلة (1) .
- II. (1) ادرس اتجاه تغير g على كل من المجالين $]-\infty; -2]$ و $]-2; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) اشرح كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (H) ، ثم ارسم (C_g) .
- (3) عَيِّن بيانيا إحداثيتي مركز تناظر (C_g) .
- III. (1) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
- (2) عَيِّن اتجاه تغير h على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) أنشئ (C_h) .
- (4) حل بيانيا المتراجحة $h(x) - 3 \leq 0$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

I. x عدد حقيقي ، $A(x)$ و $B(x)$ عبارتان جبريتان معرفتان كما يلي:

$$A(x) = \cos\left(\frac{17\pi}{2}\right) - \sin(\pi + x) + \cos(11\pi + x)$$

$$B(x) = \cos(-x) + \sin(7\pi - x) - \sin(3\pi)$$

- (1) بَيِّن أن: $A(x) = \sin x - \cos x$ و $B(x) = \cos x + \sin x$.
- (2) احسب $\cos x$ و $\sin x$ علما أن:

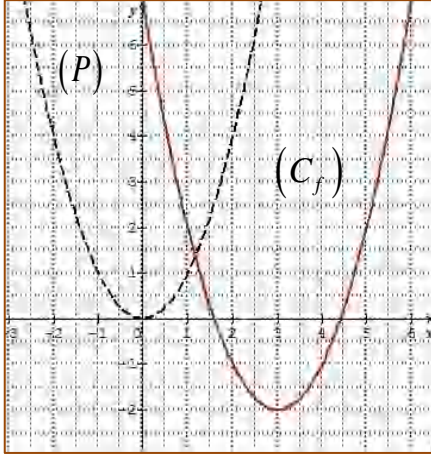
$$\begin{cases} A(x) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ B(x) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[\end{cases}$$

II. عين الجواب الصحيح في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير:

الجواب (3)	الجواب (2)	الجواب (1)	
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	(a) القيس الرئيسي للزاوية $\frac{697\pi}{3}$ هو: _____
$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	(b) $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ يساوي: _____
$\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$	$\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$	(c) إذا كان $\cos x = \frac{1}{3}$ و $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ فإن: _____
$\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}$	1	-1	(d) القيمة المبسطة للعبارة $A(x) = \sin \frac{5\pi}{6} \times \sin \frac{19\pi}{6} + \cos \frac{11\pi}{6} \times \cos \frac{17\pi}{6}$ هي: _____

تمنياتي لكم بالتوفيق

الإجابة النموذجية للوظيفة المنزلية رقم 05

إنشاء (C_f) :

(4) حل بيانيا المعادلتين :

(1): $f(x) = -2$ حلول المعادلة (1) بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = -2$

من البيان نجد أن للمعادلة (1) حل مضاعف يساوي 3

التحقق من حلول المعادلة (1) جبريا: (1) تكافئ $(x-3)^2 - 2 = -2$ هذا معناه أن: $(x-3)(x-3) = 0$ المعادلة الأخيرة تقبل حلا مضاعفا هو 3 إذن: $S = \{3; 3\}$ (2): $f(x) = m$ حلول المعادلة (2) بيانيا هي فواصل نقط تقاطع C_f مع المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذي المعادلة $y = m$ من البيان نجد أن حلول المعادلة (2) تتغير حسب قيم العدد الحقيقي m وعليه تكون لدينا المناقشة التالية:

قيم m	حلول المعادلة (2)
$m \in]-\infty; -2[$	لا توجد حلول
$m = -2$	يوجد حل مضاعف يساوي 3
$m \in]-2; +\infty[$	يوجد حلان

$$g(x) = 3 - \frac{1}{x+2} ; D_g = \mathbb{R} - \{-2\} \quad \text{II.}$$

(1) دراسة اتجاه تغير g على D_g :على المجال $]-\infty; -2[$:ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين من $]-\infty; -2[$ بحيث $x_1 < x_2 < -2$ بإضافة 2 نجد: $x_1 + 2 < x_2 + 2 < 0$ (الطرفان سالبان تماما)

$$\frac{1}{x_1 + 2} > \frac{1}{x_2 + 2} \quad \text{بالقلب نجد:}$$

$$-\frac{1}{x_1 + 2} < -\frac{1}{x_2 + 2} \quad \text{بالضرب في (-1) نجد:}$$

حل التمرين الأول:

$$f(x) = x^2 - 6x + 7 ; D_f = \mathbb{R} \quad \text{I.}$$

(1) تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x+a)^2 + b$$

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$(x+a)^2 + b = x^2 + 2ax + a^2 + b$$

بالمطابقة مع عبارة الدالة f المعطاة نجد:

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases} \quad \text{إذن:} \quad \begin{cases} 2a = -6 \\ a^2 + b = 7 \end{cases} \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} a = -3 \\ (-3)^2 + b = 7 \end{cases}$$

$$f(x) = (x-3)^2 - 2 \quad \text{عندئذ:}$$

(2) دراسة اتجاه تغير f على $\mathbb{R}$:(أ) على المجال $]-\infty; 3]$: ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين من

$$]-\infty; 3] \quad \text{بحيث} \quad x_1 < x_2 \leq 3$$

بإضافة (-3) نجد: $x_1 - 3 < x_2 - 3 \leq 0$ (الطرفان سالبان)

$$(x_1 - 3)^2 > (x_2 - 3)^2 \quad \text{بالتربيع نجد:}$$

$$(x_1 - 3)^2 - 2 > (x_2 - 3)^2 - 2 \quad \text{بإضافة (-2) نجد:}$$

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{أي:}$$

إذن: f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 3]$.(ب) على المجال $[3; +\infty[$: بطريقة مماثلة نجد أن f متزايدةتماما على المجال $[3; +\infty[$.جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$		-2	

(3) تبيان أن (C_f) هو صورة (P) بانسحاب شعاعه $\vec{u}$:لتكن $M'(X; Y)$ نقطة من (C_f) ولتكن $M(x; y)$ نقطة من

$$\text{القطع المكافئ } (P) \text{ ومنه } \overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x-X \\ y-Y \end{pmatrix},$$

$$\text{لدينا: } y+2 = (x-3)^2 \quad (C_f): y = (x-3)^2 - 2 \quad \text{ومنه}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{نجد أن:} \quad \begin{cases} X = x-3 \\ Y = y+2 \end{cases} \quad \text{بوضع:}$$

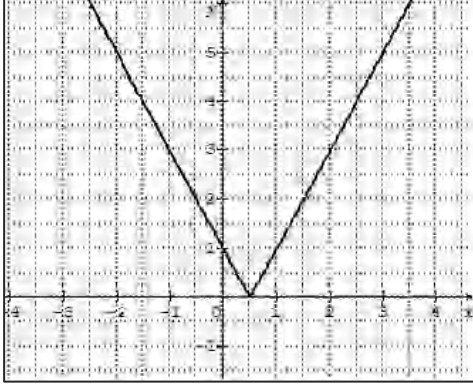
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{إذن: } (C_f) \text{ هو صورة } (P) \text{ بانسحاب شعاعه}$$

تماما على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ (لأن $2 > 0$).

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$h(x)$		0	

(3) إنشاء (C_h) :



(4) حل بيانيا المتراجحة $h(x) - 3 \leq 0$:

حلول المتراجحة $h(x) \leq 3$ بيانيا هي فواصل نقط (C_h) الواقعة تحت المستقيم ذي المعادلة $y = 3$ مع فواصل النقط المشتركة بينهما.

إذن: $S = [-1; 2]$.

حل التمرين الثاني:

I. 1) تبيان أن: $A(x) = \sin x - \cos x$

و $B(x) = \cos x + \sin x$

$$\begin{aligned} A(x) &= \cos\left(\frac{17\pi}{2}\right) - \sin(\pi + x) + \cos(11\pi + x) \\ &= \cos\left(8\pi + \frac{\pi}{2}\right) - (-\sin x) + \cos(10\pi + \pi + x) \\ &= \cos\frac{\pi}{2} + \sin x - \cos x \end{aligned}$$

إذن: $A(x) = \sin x - \cos x$ وهو المطلوب.

$$\begin{aligned} B(x) &= \cos(-x) + \sin(7\pi - x) - \sin(3\pi) \\ &= \cos x + \sin(6\pi + \pi - x) - \sin(2\pi + \pi) \\ &= \cos x + \sin x - \sin \pi \end{aligned}$$

إذن: $B(x) = \cos x + \sin x$ وهو المطلوب.

(2) حساب $\sin x$ و $\cos x$:

$$\begin{aligned} A(x) \times B(x) &= (\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x) \\ &= \sin^2 x - \cos^2 x \\ &= 1 - 2\cos^2 x \end{aligned}$$

لدينا:

$$\cos^2 x = \frac{1 - A(x) \times B(x)}{2} \quad \text{ومنه:}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad \text{حسب المعطيات نجد أن:}$$

بإضافة 3 نجد: $3 - \frac{1}{x_1 + 2} < 3 - \frac{1}{x_2 + 2}$

أي: $g(x_1) < g(x_2)$

إذن: g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -2[$.

بطريقة مماثلة نثبت أن g متزايدة تماما على المجال $]-2; +\infty[$.

جدول تغيرات g :

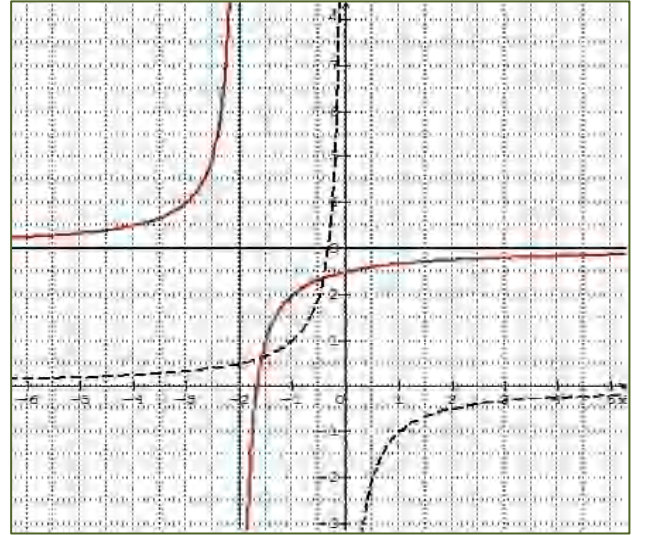
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$			

(2) شرح كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (H) :

نرسم (H') نظير القطع الزائد (H) بالنسبة إلى محور الفواصل

، (C_g) هو صورة (H') بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

إنشاء (C_g) :



(4) تعيين مركز تناظر المنحني (C_g) بيانيا:

(C_g) متناظر بالنسبة إلى النقطة $A(-2; 3)$.

III. $h(x) = |1 - 2x|$; $D_h = \mathbb{R}$

(1) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = |1 - 2x| = \begin{cases} 1 - 2x & ; 1 - 2x \geq 0 \\ 2x - 1 & ; 1 - 2x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - 2x & ; x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & ; x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(2) تعيين اتجاه تغير h على $\mathbb{R}$:

h متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$ (لأن $2 < 0$) ومتزايدة

وبالتالي : $\cos x = \frac{1}{2}$ أو $\cos x = -\frac{1}{2}$

بما أن $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ فإن $\cos x \leq 0$ إذن: $\cos x = -\frac{1}{2}$

II. تعيين الجواب الصحيح في كل حالة مع التعليل:
 بالتعويض في العبارة $A(x)$ نجد أن: $\sin x = A(x) + \cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{1}{2}$ إذن: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

التعليل	الجواب الصحيح	
$\frac{697\pi}{3} = \frac{696\pi + \pi}{3} = 232\pi + \frac{\pi}{3}$	1	(a)
$\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{-8\pi + \pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	2	(b)
نعلم أنه لكل x من $\mathbb{R}$: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ومنه $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \sin^2 x = 1$ وبالتالي $\sin^2 x = \frac{8}{9}$ ، وبما أن $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ فإن: $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$	3	(c)
$A(x) = \sin \frac{5\pi}{6} \times \sin \frac{19\pi}{6} + \cos \frac{11\pi}{6} \times \cos \frac{17\pi}{6}$ $= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \times \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \times \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ $= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $= -1$	1	(d)