

نص التمرين:

- I/** عين عبارة الدالة f الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $2y'' + y' - 1 = 0$ الذي يحقق: $f(2) = 2$ و $f'(2) = 0$.
- II/** نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1/ أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
 - 2/ ا/ بين أن المستقيم (D) ذو معادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.
ب/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .
 - 3/ ا/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x$.
ب/ أحسب $f(6)$ ثم أنشئ بدقة كلا من (D) و (Δ) و (C_f) . (وحدة الطول 2 cm)
 - 4/ ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $(f(x))^2 = 4e^{-x+2} + (x-2)^2 + 4(x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1}$.
ب/ بين أن: $\int_0^2 (4e^{-x+2} + (x-2)^2) dx = 4e^2 - \frac{4}{3}$.
ج/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $\int_0^2 (x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1} dx = -4$.
د/ استنتج بـ cm^3 الحجم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول محور الفواصل على المجال $[0; 2]$.
- III/** نعرّف متتالية (u_n) بحددها الأول $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2e^{-\frac{1}{2}u_n+1} + u_n - 2$.
- 1/ ا/ مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.
ب/ ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
 - 2/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 6$.
 - 3/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة وعين نهايتها.
- IV/** نعتبر n عدداً طبيعياً. نضع: $A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx$ ، ونعرّف متتالية (v_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = A(n) - 4e$.
- 1/ أكتب $A(n)$ بدلالة n وأعط تفسيره الهندسي، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$.
 - 2/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\int_n^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx \geq 0$ ثم استنتج رتبة المتتالية (v_n) .
 - 3/ بين أن (v_n) متتالية هندسية معينة أساسها وحدها الأول.
 - 4/ ا/ أحسب بدلالة n العدد I_n بحيث: $I_n = \int_0^n (x-2) dx$.
ب/ أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx + \dots + \int_0^n f(x) dx$.
(إرشاد: من أجل كل عدد طبيعي n : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

شافية راشدي موه
الموسم: 4/2025
المستوى: 03 - رياضيات
- سيرة معروفة.
باب الفهم الأول الفصل الثاني

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \frac{e^{-\frac{1}{2}x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}x} \right) \quad \text{لأن}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-e \frac{e^t}{t} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

إيجاد المشتق: لنبدأ أولاً بالحد $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{1}{2}x+1} + 1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}x+1} \quad \text{أو}$$

$$1 - e^{-\frac{1}{2}x+1} > 0 \quad \text{أو} \quad 1 - e^{-\frac{1}{2}x+1} = 0$$

$$1 > e^{-\frac{1}{2}x+1} \quad \text{أو} \quad 1 = e^{-\frac{1}{2}x+1}$$

$$0 > -\frac{1}{2}x+1 \quad \text{أو} \quad 0 = -\frac{1}{2}x+1$$

$$-1 > -\frac{1}{2}x \quad \text{أو} \quad x = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$2 < x \quad \text{أو}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

نلاحظ أن f متزايدة على $]-\infty, 2]$ و متناقص على $]2, +\infty[$.

1- إيجاد تباين $y = x - 2$ (D): معاً،

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2 \quad \text{أو}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} = 0 \quad \text{أو}$$

لذلك $(D): y = x - 2$ معاً،

نلاحظ أن (f) متزايدة على $]-\infty, 2]$ و متناقص على $]2, +\infty[$.

2- إيجاد المشتق: لنبدأ أولاً بالحد $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - (x - 2) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} > 0 \quad \text{أو}$$

لذلك (f) يقع فوق (D) (أو)

3- إيجاد تباين $y = x - 2$ (D): معاً،

$$f(x) - x = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} - 2 = 2 \left(e^{-\frac{1}{2}x+1} - 1 \right) \quad \text{أو}$$

(I) تعيين حد، لكل الخاص للمعادلة

$$2y'' + y' - 1 = 0 \quad \text{المعادلة}$$

$$y'' = -\frac{1}{2}y' + \frac{1}{2} \quad \text{معاً}$$

$$f'(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} \quad \text{لأن}$$

$$f'(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + 1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad \text{أو}$$

$$C_1 e^{-1} + 1 = 0 \quad \text{معاً} \quad f'(2) = 0 \quad \text{أو}$$

$$C_1 = \frac{-1}{e^{-1}} = -e \quad \text{أو}$$

$$f'(x) = -e e^{-\frac{1}{2}x} + 1 = -e^{-\frac{1}{2}x+1} + 1 \quad \text{أو}$$

$$f(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x+1} + x + C_2 \quad \text{معاً}$$

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R})$$

$$2e^0 + 2 + C_2 = 2 \quad \text{معاً} \quad f(2) = 2 \quad \text{أو}$$

$$C_2 = -2 \quad \text{أو}$$

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2 \quad \text{لأن}$$

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2 \quad D_f = \mathbb{R} \quad \text{(II)}$$

4- دراسة تغيرات f و f' :

الحد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2) = +\infty \quad \text{أو}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} = 0 \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2e^t = 0 \quad \text{أو}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2) = +\infty \quad \text{أو}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 \frac{e^{-\frac{1}{2}x+1}}{x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty \quad \text{أو}$$

$$= -4e^1 + 2[-2e^{\frac{1}{2}x+1}]_0^2$$

$$= -4e + 2(-2e^0 + 2e) = -4e - 4 + 4e$$

$$= -4 \quad (Q25)$$

$$V = \int_0^2 \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_0^2 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (4e^{-x+2} + (x-2)^2) dx + \pi \int_2^4 (x-2)e^{\frac{1}{2}x+1} dx$$

$$= \pi \left(4e^2 - \frac{4}{3} - 4 \right)$$

$$V = \pi \left(4e^2 - \frac{4}{3} \right) \text{ u.v.} \quad (Q25)$$

$$V = 8\pi \left(4e^2 - \frac{4}{3} \right) \text{ cm}^3 \quad (Q25)$$

$$n \in \mathbb{N} \quad (u_n): \begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (III) \quad (Q25)$$

في كل خطوة واحدة، u_n يتقارب إلى 2 من الأعلى أو من الأسفل.

1- التحليل: (u_n) متتالية متناقصة وبتجاه 2 من الأعلى أو من الأسفل.

2- البرهان بالرجوع: $2 \leq u_n \leq 6$

نسمي $P(n)$ الخاصية: $2 \leq u_n \leq 6$ ونثبت صحة $P(n)$ لكل عدد طبيعي n .

لنبدأ من $n=0$: $2 \leq (u_0=6) \leq 6$

لذا $P(0)$ صحيحة.

افترضنا k عددا طبيعيا ونفرض $P(k)$ صحيحة.

نريد أن نثبت $2 \leq u_k \leq 6$

دالة متزايدة على المجال $[2, 6]$ فالحاصل

$$f(2) \leq f(u_k) \leq f(6)$$

أي:

$$f(2) \leq u_{k+1} \leq f(6) \quad (Q25)$$

لذا $P(k+1)$ صحيحة فكل $P(k)$ صحيحة.

لذا $2 \leq u_n \leq 6$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) - x = -2(1 - e^{\frac{1}{2}x+1})$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$
الوضع التي	فوق (4)	نقطة (2, 2)	تحت (4)

1- لا يتناقص: $f(2) = 2$

$$f(6) = 2e^{-e} + 4 \approx 4.27 \quad (Q25)$$

نجد أن $f(x) > x$ على $(-\infty, 2)$ و $f(x) < x$ على $(2, +\infty)$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

$$f(0) = 2e - 2 \approx 3.44$$

14- التحقق: لدينا أن $f(x) > x$ على $(-\infty, 2)$ و $f(x) < x$ على $(2, +\infty)$.

$$(f(x))^2 = (2e^{\frac{1}{2}x+1} + (x-2))^2$$

$$= 4e^{-x+2} + (x-2)^2 + 4(x-2)e^{\frac{1}{2}x+1}$$

1- حساب التكامل:

$$\int_0^2 (4e^{-x+2} + (x-2)^2) dx = \left[-4e^{-x+2} + \frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_0^2$$

$$= [-4e^0 - (-4e^2 - \frac{8}{3})] = -4 + 4e^2 + \frac{8}{3} = -\frac{4}{3} + 4e^2 \quad (Q25)$$

$$\int_0^2 (x-2)e^{\frac{1}{2}x+1} dx$$

$$u(x) = 1, \quad v(x) = x-2, \quad u'(x) = 0, \quad v'(x) = 1$$

$$\int_0^2 (x-2)e^{\frac{1}{2}x+1} dx = \left[(x-2)(-2e^{\frac{1}{2}x+1}) - \int_0^2 -2e^{\frac{1}{2}x+1} dx \right]_0^2$$

ثانياً: التغير 2

$$v_{n+1} - v_n = A(n+1) - 4e - A(n) + 4e$$

$$= \int_0^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx - \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx$$

$$= \int_n^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx > 0$$

فالتسلسل (v_n) متزايداً (01)

3- تبين (v_n) متناهية (01)

$$v_{n+1} = A(n+1) - 4e = -4e^{-\frac{1}{2}(n+1)+1}$$

$$= -4e^{-\frac{1}{2}n+1} e^{-\frac{1}{2}} = v_n (e^{-\frac{1}{2}})$$

لذا (v_n) متناهية $q = e^{-\frac{1}{2}}$ (02)

$$v_0 = A(0) - 4e = 0 - 4e$$

$$v_0 = -4e$$

4- I_n متناهية (01)

$$I_n = \int_0^n (x-2) dx = \left[\frac{1}{2}(x-2)^2 \right]_0^n$$

$$= \frac{1}{2}(n-2)^2 - \frac{1}{2}(-2)^2$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + 2 - 2n$$

$$= \frac{1}{2}n^2 - 2n$$

5- S_n متناهية (01)

$$S_n = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx$$

لذا $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1}$ و $f(x) = (x-2)$

$$\int_0^n f(x) dx = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx + \int_0^n (x-2) dx$$

$$= A(n) + I_n = v_n + 4e + \frac{1}{2}n^2 - 2n$$

$$S_n = (v_0 + 4e + \frac{1}{2}(1)^2 - 2(1)) + (v_1 + 4e + \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2)) + \dots + (v_n + 4e + \frac{1}{2}(n)^2 - 2(n))$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (4e + 4e + \dots + 4e)$$

$$+ \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (-2 + -4 + \dots - 2n)$$

- 03 متناهية (01)

3- تبين (u_n) متناهية (01)

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

و من حيث ماسية (1) ماسية الفرق $f(x) - x$

$$2 \leq u_n \leq 6$$

$$f(u_n) - u_n < 0$$

فالتسلسل (u_n) متناقصاً (02)

الآن تبين (u_n) متناهية (01)

لأن u_n متناقصاً و $u_n \geq 2$ فالتسلسل متناهية (01)

$$f(x) = x$$

و من حيث ماسية $x = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$$

$$A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx ; n \in \mathbb{N}$$

$$v_n = A(n) - 4e$$

6- تبين $A(n)$ متناهية (01)

$$A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx = 2 \left[-2e^{-\frac{1}{2}x+1} \right]_0^n$$

$$= 2(-2e^{-\frac{1}{2}n+1} + 2e)$$

$$A(n) = -4e^{-\frac{1}{2}n+1} + 4e$$

7- تبين $A(n)$ متناهية (01)

$$A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx = \int_0^n [f(x) - (x-2)] dx$$

لأن $f(x) - (x-2) > 0$ و $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1}$

فالتسلسل $A(n)$ متناقصاً (01)

و $A(n) \geq 0$ فالتسلسل متناهية (01)

لأن $x=0$ و $x=n$

و من حيث ماسية $x=0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-4e^{-\frac{1}{2}n+1} + 4e) = 4e$$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} -4e^{-\frac{1}{2}n+1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -4e^t = 0 \right]$$

8- تبين $A(n)$ متناهية (01)

$$\int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx > 0$$

$$S_n = \left(\frac{4e^{\frac{1}{2}}}{1 - e^{\frac{1}{2}}} \right) (1 - e^{\frac{1}{2}n}) + (4en)$$

$$+ \frac{1}{1e} n(n+1)(2n+1) - n^3 - n$$

$$S_n = \left(\frac{4e^{\frac{1}{2}}}{1 - e^{\frac{1}{2}}} \right) (1 - e^{\frac{1}{2}n}) + \frac{1}{6} n^3 - \frac{1}{2} n^2 + (4e + \frac{5}{6})n$$

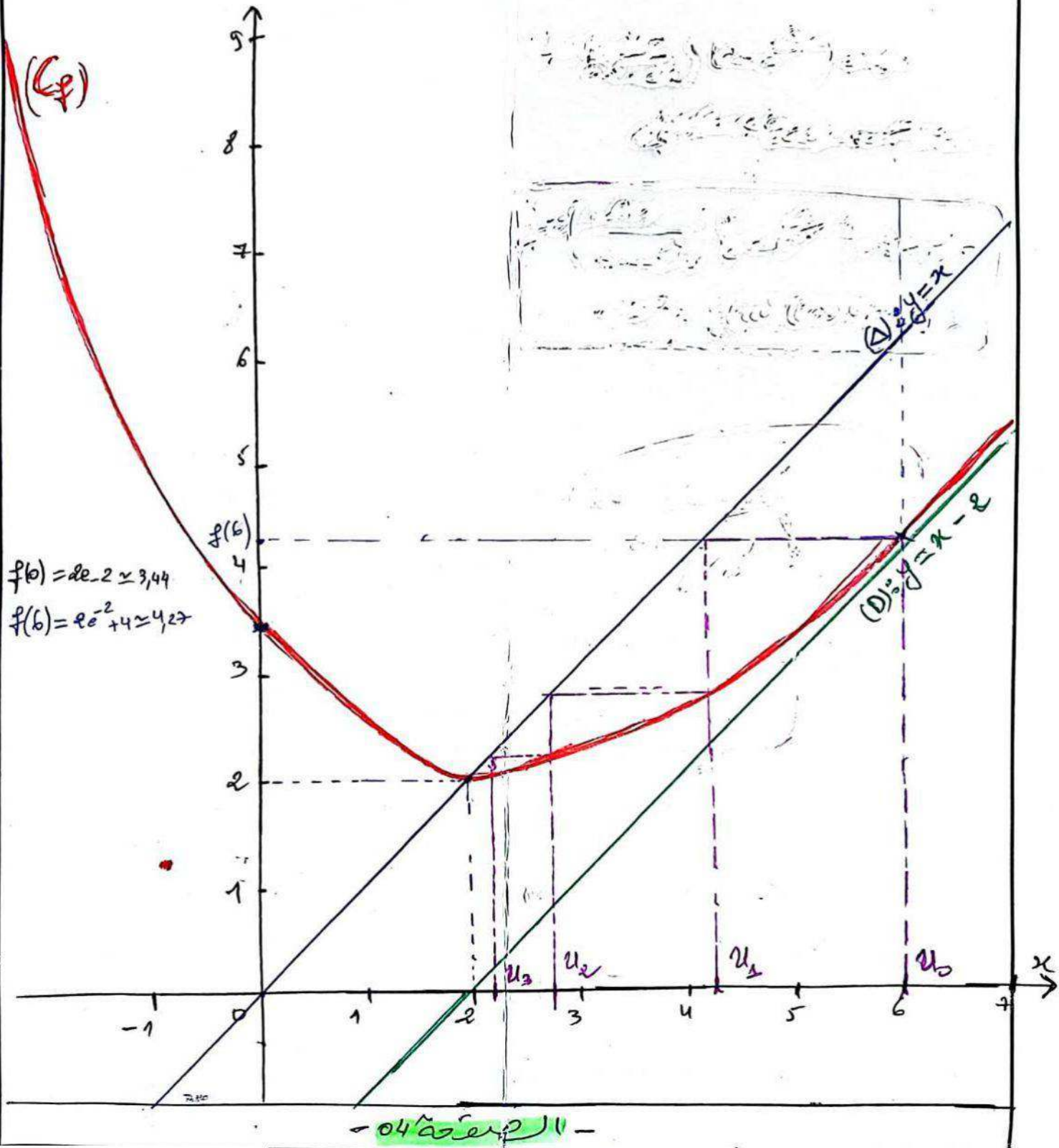
$$S_n = \frac{1}{1} \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) + 4e(n) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{2}$$

$$+ \left(\frac{e - 2n}{2} \right) (n)$$

0,75

$$S_n = -4e e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - (e^{\frac{1}{2}})^n}{1 - e^{\frac{1}{2}}} \right) + 4en + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

$$- n - n^2$$



$$S_n = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx.$$

[0, n] : ω_n كى ، n ω_n كى ω_n كى

$$\int_0^n f(x) dx = \int_0^n (2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x-2) dx = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx + \int_0^n (x-2) dx.$$

$$= A(n) + I_n = \left[2e^{-\frac{1}{2}x+1} + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_0^n$$

0.3

$\omega_0 = 0$, $r = -2$: $\omega_n = -2n$! $\omega_n = -2n$! $\omega_n = -2n$!

1.2.9

$$S_n = \left(2e^{-\frac{1}{2} \cdot 1 + 1} + 4e + \frac{1}{2}(1)^2 + \omega_1 \right) + \left(2e^{-\frac{1}{2} \cdot 2 + 1} + 4e + \frac{1}{2}(2)^2 + \omega_2 \right) + \dots$$

$$+ \dots + \left(2e^{-\frac{1}{2} \cdot n + 1} + 4e + \frac{1}{2}(n)^2 + \omega_n \right)$$

$$= (2e^{-\frac{1}{2} \cdot 1 + 1} + 2e^{-\frac{1}{2} \cdot 2 + 1} + \dots + 2e^{-\frac{1}{2} \cdot n + 1}) + \underbrace{(4e + 4e + \dots + 4e)}_{n \text{ terms}} + \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$+ (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)$$

0.75

$$= 2e^{-\frac{1}{2} \cdot 1 + 1} \left(\frac{1 - 9^n}{1 - 9} \right) + 4en + \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + (\omega_1 + \omega_n) \frac{n}{2}.$$

$$= -4e^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - e^{-\frac{1}{2}n}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \right) + 4en + \frac{1}{12} (n)(n+1)(2n+1) + (-2-2n) \frac{n}{2}$$

$$S_n = \left(\frac{-4e^{-\frac{1}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \right) (1 - e^{-\frac{1}{2}n}) + 4en + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \left(\frac{-4e^{-\frac{1}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \right) (1 - e^{-\frac{1}{2}n}) + \frac{1}{6}n^3 - \frac{3}{4}n^2 + \left(\frac{48e - 11}{12} \right) n.$$