

الشعبة : تقني رياضي	اختبار في مادة : الرياضيات	المدة : 04 سا و 30 د
---------------------	----------------------------	----------------------

على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

لدينا حجر نرد مغشوش مكعب الشكل ، وجوهه مرقمة بالأرقام من 1 إلى 6

نسمي P_n احتمال الحصول على الرقم n مع $1 \leq n \leq 6$ حيث :

• الأعداد $P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1$ تشكل بهذا الترتيب حدودا متتالية لمتتالية حسابية أساسها r غير معدوم

• الأعداد P_4, P_2, P_1 تشكل بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية

(1) أ) بين أن : $P_1 = r = \frac{1}{21}$

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n حيث : $1 \leq n \leq 6$ ، لدينا : $P_n = \frac{n}{21}$

(2) نرمي هذا النرد مرة واحدة و نسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي بعد استقرار النرد

أ) احسب احتمال وقوع الحوادث التالية :

A " الحصول على رقم زوجي " ، B " الحصول على رقم اكبر او يساوي 3 " ، C " الحصول على مربع تام "

التمرين الثاني : (05 نقاط)

I. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ب : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

(1) أ) بين ان $U_1 = \ln \sqrt{2}$

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+2} + U_n = \frac{1}{n+1}$

ج) استنتج قيمة U_3

(2) أ) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

II. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ب : $V_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$

(1) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} U_{n+2}$

(2) ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} n V_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

التمرين الثالث : (04,5 نقاط)

(1) أ/ أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7 .
ب/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $3^n \equiv 3[6]$

ج/ استنتج أن العدد 7 قاسما للعدد a حيث : $a = 1447^{2025^{1962}} - (2025^{1447})^{1962}$

(2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون : $4(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1) \equiv 3[7]$

(3) أ/ تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n يكون : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$

ب/ عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7

(4) فيما يلي نفرض : $n = 9$

نعتبر المعادلة : $(E) C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \dots$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ/ بين أن المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل

ب/ بين انه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 0[5]$ ثم حل في $\square^2$ المعادلة (E)

التمرين الرابع : (07,5 نقاط)

I. الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $g(x) = (x-1) - 4 \ln x$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد

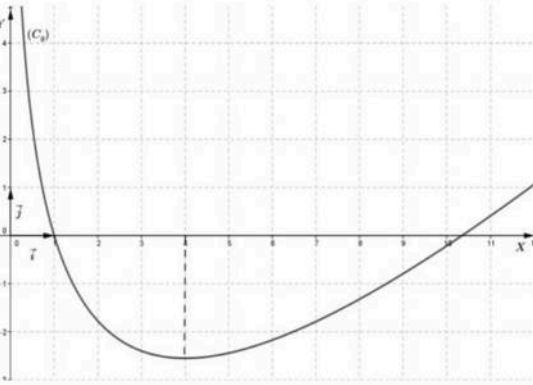
و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. في الشكل المقابل المنحني (C_g) يقطع

محور الفواصل في النقطتين فواصلها 1 و α

بقراءة بيانية :

أ) شكل جدول تغيرات الدالة g

ب) حدد حسب قيم x إشارة g



II. الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4 \ln x$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ) تحقق انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$

ب) بين ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فسر هندسيا النتيجة.

(2) أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g'(x)(e^{g(x)} - 1)$

ب) بين أن f متناقصة تماما على المجالين $]0; 1[$ و $[4; \alpha]$ و f متزايدة تماما على المجالين $[1; 4]$ و $[\alpha; +\infty[$

ج) بين أن $f(1) = 1$ و احسب $f(4)$ ثم شكل جدول تغيراتها

(3) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $e^x - 2x > 0$ ثم ادرس الوضع النسبي ل (C_g) و (C_f)

(4) أرسم المنحني (C_f) نأخذ $\alpha \approx 10.5$.

(5) A مساحة الحيز المستوي المحدد ب (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=3$ و $x=5$

أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x على المجال $[3; 5]$: $-g(x) < f(x) < f(4)$

ب) الدالة $x \mapsto x(-1 + \ln x)$ هي أصلية ل $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

ج) بين أن $20 \ln 5 - 12 \ln 3 - 14 < A < 2f(4)$

الإجابة النموذجية لموضوع إمتحان البكالوريا التجريبية دورة ماي 2025 شعبة تقني رياضي

العلامة		عناصر الاجابة	(الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة		
التمرين الأول : 03 نقاط			
03ن	0,5ن	(1) لدينا : $P_2 = P_1 + r$ و $P_4 = P_1 + 3r$ و $P_2^2 = P_1 \times P_4$ بالتعويض نجد : $P_1 = r$	
	0,5ن	و $P_1 = r = \frac{1}{21}$ ومنه $\sum_{i=1}^6 P_i = 6(\frac{P_1 + P_6}{2}) = 21P_1 = 1$	
	0,5ن	(2) لدينا $P_1 = r = \frac{1}{21}$ ومنه $P_2 = P_1 + r = 2P_1 = \frac{2}{21}$ ومنه $P_n = \frac{n}{21}$	
	3×0,5ن	(3) $P(C) = \frac{5}{21}$ ، $P(B) = \frac{18}{21}$ ، $P(A) = \frac{12}{21}$	
التمرين الثاني : 05 نقاط			
05ن	0,5ن	I. (أ) $U_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \ln \sqrt{2}$	
	0,5ن	(ب) $U_{n+2} + U_n = \left(\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} + \frac{x^n}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big _0^1 = \frac{1}{n+1}$	
	0,5ن	(ج) $U_3 = \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2}$ ومنه $U_3 + U_1 = \frac{1}{2}$	
	01ن	(2) (أ) $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$	
	0,5ن	(ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$	
	01ن	II. (1) $V_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x^2) \Big _0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} U_{n+2}$	
	01ن	(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} nV_n = \ln 2$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$	
التمرين الثالث : 04,5 نقاط			
04,5ن	0,5ن	(1) (أ) $5^6 \equiv 1[7]; 5^5 \equiv 3[7]; 5^4 \equiv 2[7]; 5^3 \equiv 6[7]; 5^2 \equiv 4[7]; 5^1 \equiv 5[7]; 5^0 \equiv 1[7]$ ومنه لكل $k \in \mathbb{Z}$ $5^{6k+\alpha} \equiv 5^\alpha [7]$ حيث $\alpha \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$	
	0,5ن	(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P(n) \cdots 3^n \equiv 3[6]$: المرحلة الأولى : من أجل $n=1$: $3^1 \equiv 3[6]$ ومنه $P(1)$ محققة المرحلة الثانية : نفرض انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P(n)$ محققة ونبرهن صحة $P(n+1)$	
	01ن	$1447^{2025^{1962}} \equiv 1[7]$ و $(2025^{1447})^{1962} \equiv 1[7]$ ومنه $1447^{2025^{1962}} - (2025^{1447})^{1962} \equiv 0[7]$ قاسم ل 7	
	0,5ن	(2) $5^{n-1} \equiv 3[7] : (k \in \mathbb{Z}^*) n = 6k$ ومنه من اجل $4 \times (5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1) = 5^{n-1}$	
	0,25ن	(3) (أ) $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = n(n+1) + (n+3)(n+2) = 2n^2 + 6n + 6$	

(ب)

01ن

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$2n^2 \equiv$	0	2	1	4	4	1	2
$6n \equiv$	0	6	5	4	3	2	1
$2n^2 + 6n + 6 \equiv$	6	0	5	0	6	2	2

وبالتالي : $n = 7k + 1$ أو $n = 7k + 3$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

0,25ن

$$(4) \quad C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \cdots (E) \quad \text{ومنه } 45x - 132y = 15 \quad \text{ومنه } 15x - 44y = 5$$

$$\text{ومنه } 44y = 15x - 5 \quad \text{ومنه } 44y \equiv -5[15] \quad \text{ومنه } y \equiv 5[15]$$

$$\text{و بالتالي } y \equiv 0[5] \quad \text{لان } y = 15k + 5 = 5(3k + 1) \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

0,5ن

$$\text{حل في } \mathbb{Z}^2 \quad \text{المعادلة } (E) : (x; y) = \{44k + 15; 5k\} \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

التمرين الرابع : 07,5 نقاط

I. أ) جدول تغيرات الدالة g

0,5ن

x	0	4	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$3 - 8\ln 2$	$+\infty$

ب) جدول إشارة $g(x)$

0,5ن

x	0	1	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	+

07,5ن

0,5ن

$$e^{g(x)} - g(x) = e^{(x-1)-4\ln x} - (x-1) + 4\ln x = \frac{e^{(x-1)}}{e^{4\ln x}} - (x-1) + 4\ln x \quad \text{II. أ)}$$

$$= \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4\ln x = f(x)$$

2×0,25ن

0,25ن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{g(x)} - g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \left[\frac{e^{g(x)}}{g(x)} - 1 \right] = +\infty \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{g(x)} - g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \left[\frac{e^{g(x)}}{g(x)} - 1 \right] = +\infty$$

التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل حامل محور الترتيب كمستقيم مقارب

5 أ) الدالة قابلة للاستقاق على المجال و دالتها المشتقة هي :

0,25ن

$$f'(x) = g'(x)e^{g(x)} - g'(x) = g'(x)(e^{g(x)} - 1)$$

ب) إشارة $f'(x)$: $g'(x)=0$ أو $e^{g(x)}-1=0$

0,5ن

x	0	1	4	α	$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	
$e^{g(x)} - 1$		+ 0	−	0	+
$f'(x)$		− 0	+ 0	− 0	+

0,5ن

وبالتالي : الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]0;1]$ و $[4;\alpha]$ و الدالة f متزايدة تماما على المجالين $[1;4]$ و $[\alpha;+\infty[$

2×0,25ن

ج) لدينا $f(1)=e^{g(1)}-g(1)=e^0-0=1$ و $f(\alpha)=e^{g(\alpha)}-g(\alpha)=e^0-0=1$
جدول تغيرات الدالة f

0,5ن

x	0	1	4	α	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

$$f(4)=e^{g(4)}-g(4)=e^{3-8\ln 2}-3+8\ln 2=\frac{e^3}{2^8}-3+8\ln 2$$

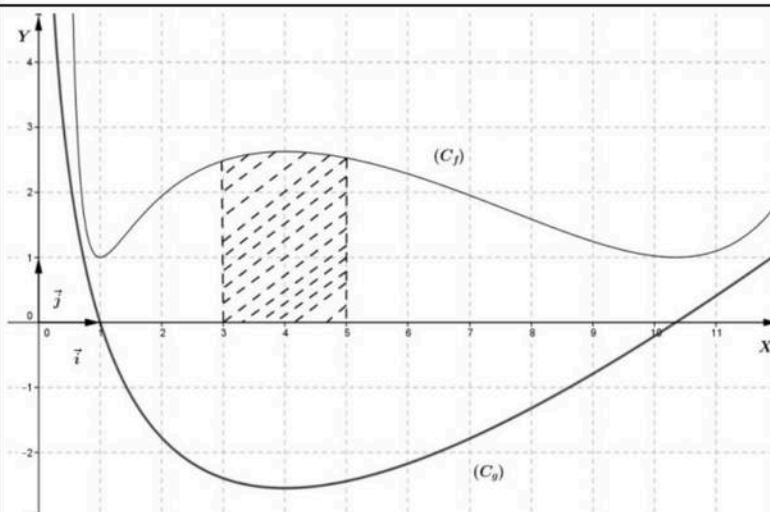
0,25ن

6) $e^x-2x>0$ ، دراسة الوضع النسبي ل (C_f) و (C_g)

0,5ن

ندرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$: $f(x)-g(x)=e^{g(x)}-2g(x)>0$
وبالتالي (C_f) يقع فوق (C_g)

01ن



7) رسم (C_f)

0,25ن	(8) أ) $-g(x) < f(x) < f(4)$
0,5ن	ب) الدالة $x \mapsto x(-1 + \ln x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي: $x \mapsto \ln x$ وبالتالي الدالة $x \mapsto x(-1 + \ln x)$ هي أصلية ل $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$
0,5ن	ج) لدينا $-g(x) < f(x) < f(4)$ ومنه $-\int_3^5 g(x)dx < \int_3^5 f(x)dx < \int_3^5 f(4)dx$ ومنه $-\left[\frac{1}{2}x^2 + x + 4x(-1 + \ln x)\right]_3^5 < \int_3^5 f(x)dx < [f(4)x]_3^5$ و بالتالي $20\ln 5 - 12\ln 3 - 14 < A < 2f(4)$

من إعداد الأستاذ : زراوني عمر

ثانوية الشهيد أحمد زبانة " زهانة "