

الفرض الثاني: للفصل الأول

قسم: الثالثة علوم تجريبية

يوم: 20 نوفمبر 2024

الأستاذ: قويسم الخليل

المدة: 01 ساعة

I نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x - e^{-x}$ 1 ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها [01.00]2 أ- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $0.56 < \alpha < 0.57$ [00.75]ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ [00.50]II نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{x+1}{e^x+1}$ حيث (C_f) تمثيلها البياني في المستوي $(O; \vec{i}, \vec{j})$ 1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ [00.75]2 أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا [01.00]ب- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و $(\Delta): y = x + 2$ [00.50]3 أ- بيّن أنه من أجل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{-e^x \cdot g(x)}{(e^x + 1)^2}$ [00.50]ب- استنتج تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها [00.75]4 عيّن دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا [00.50]5 بين أن $f(x) = x + 1$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$ ، ثم استنتج حصر $f(\alpha)$ [01.00]6 ارسم (Δ) و (C_f) [01.00]7 ناقش بيانيا حسم قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$ [01.00]III نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $h(x) + |f(x)| = 0$ ونسمي (C_h) تمثيلها البياني [00.75]- اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f)

- يقال إن الإنسان لا يكون فيلسوفا إلا بدراسة فروع الرياضيات، كالحساب والهندسة والفلك -

تصحيح مقترح للفرض الثاني: للفصل الأول

الأستاذ: قويسم الخليل



قسم: الثالثة علوم تجريبية



(I)

① دراسة تغيرات الدالة g :

• حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

• حساب $g'(x)$:لدينا: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $g'(x) = 1 + e^{-x}$ لدينا: $e^{-x} > 0$ ومنه: $1 + e^{-x} > 0$ ومنه $g'(x) > 0$ إذن: الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

• جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$

② أ/ تبين أن $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α :لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

$$\text{ولدينا } \begin{cases} g(0.56) = 0.01 \\ g(0.57) = -0.01 \end{cases} \text{ ومنه: } g(0.57) \times g(0.56) < 0$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث $0.56 < \alpha < 0.57$ ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

وعليه:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

① حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x+1}{e^x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{e^x}{e^x} \left(\frac{\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}\right)\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}\right] = 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n/e^x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

• التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته $y = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x+1}{e^x+1}\right) = -\infty$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

② أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + \frac{x+1}{e^x+1} - x\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + \frac{x+1-xe^x-x}{e^x+1}\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + \frac{1-xe^x}{e^x+1}\right] = 1 + 1 = 2$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

• التفسير الهندسي:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 2$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 2] = 0$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$

◀ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

من أجل كل x حقيقي لدينا:

$f(x) - (x+2) = 1 + \frac{x+1}{e^x+1} - x - 2 = \frac{x+1}{e^x+1} - x - 1 = \frac{-xe^x - e^x}{e^x+1} = \frac{-e^x(x+1)}{e^x+1}$

لدينا: $e^x > 0$

ولدينا: $-(x+1) = 0$ معناه $x = -1$ إذن:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - (x+2)$	+	0	-
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-1; 1)$	(C_f) تحت (Δ)

③ أ/ حساب $f'(x)$:

لدينا: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$f'(x) = \frac{e^x+1-e^x(x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x+1-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1-xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-e^x(x-e^{-x})}{(e^x+1)^2} = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة f :

$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$

لدينا $e^x > 0$ و $(e^x+1)^2 > 0$

ومنه الإشارة من إشارة $-g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

④ تعيين دون حساب قيمة $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \right]$:

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha) = \frac{-e^{\alpha} \overbrace{g(\alpha)}^{=0}}{(e^{\alpha} + 1)^2} = 0$$

• التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماس مواز لحامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α معادلته: $y = f(\alpha)$

⑤ تبين أن المعادلة $f(x) = x + 1$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$

• اثبات أن $f(x) = x + 1$ إذا كان $g(x) = 0$:

لدينا: $g(x) = 0$

تكافئ: $x - e^{-x} = 0$

ومنه: $e^{-x} = x$

ومنه: $e^x = \frac{1}{x}$

ولدينا:

$$f(x) = 1 + \frac{x+1}{e^x + 1} = 1 + \frac{x+1}{\frac{1}{x} + 1} = 1 + \frac{x+1}{\frac{1+x}{x}} = 1 + x$$

ومنه: $f(x) = x + 1$

• اثبات أن $g(x) = 0$ إذا كان $f(x) = x + 1$:

لدينا: $f(x) = x + 1$

تكافئ: $f(x) - (x + 1) = 0$

ومنه: $1 + \frac{x+1}{e^x + 1} - x - 1 = 0$

ومنه: $\frac{x+1 - x(e^x + 1)}{e^x + 1} = 0$

ومنه: $\frac{x+1 - x(e^x + 1)}{e^x + 1} = 0$

ومنه: $\frac{1 - xe^x}{e^x + 1} = 0$

ومنه: $\frac{-e^x(x - e^{-x})}{e^x + 1} = 0$

ومنه: $x - e^{-x} = 0$

ومنه: $g(x) = 0$

- حصر $f(\alpha)$:

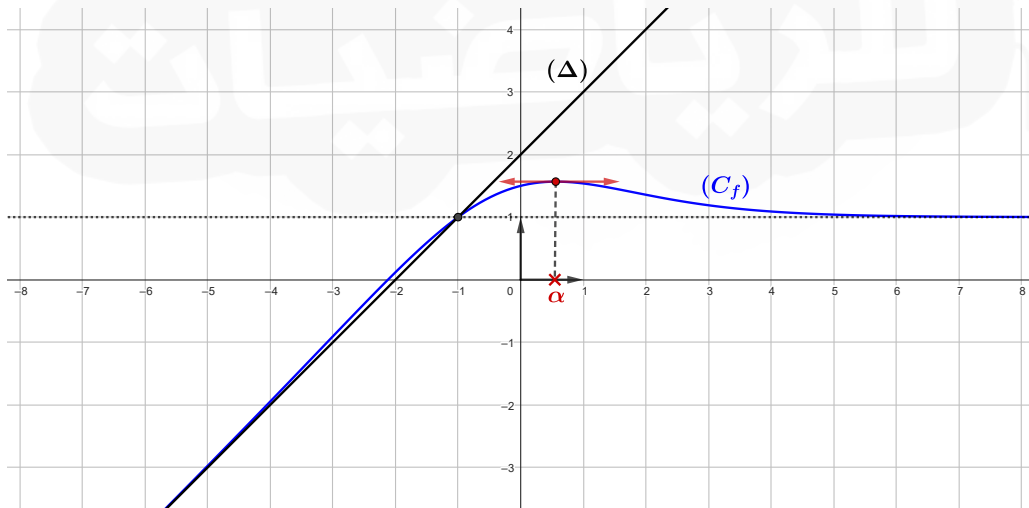
لدينا: $f(x) = x + 1$ ومنه: $f(\alpha) = \alpha + 1$

لدينا: $0.56 < \alpha < 0.57$

ومنه: $1.56 < \alpha + 1 < 1.57$

ومنه: $1.56 < f(\alpha) < 1.57$

⑥ التمثيل البياني:



7 المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$:

حلول المعادلة $f(x) = f(m)$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات $y = f(m)$

عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$	قيم m	قيم $f(m)$
حل وحيد	$m \leq -1$	$f(m) \leq 1$
حلان	$m \in]-1; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$	$1 < f(m) < f(\alpha)$
حل وحيد	$m = \alpha$	$f(m) = f(\alpha)$

III شرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) :

لدينا: $h(x) + |f(x)| = 0$

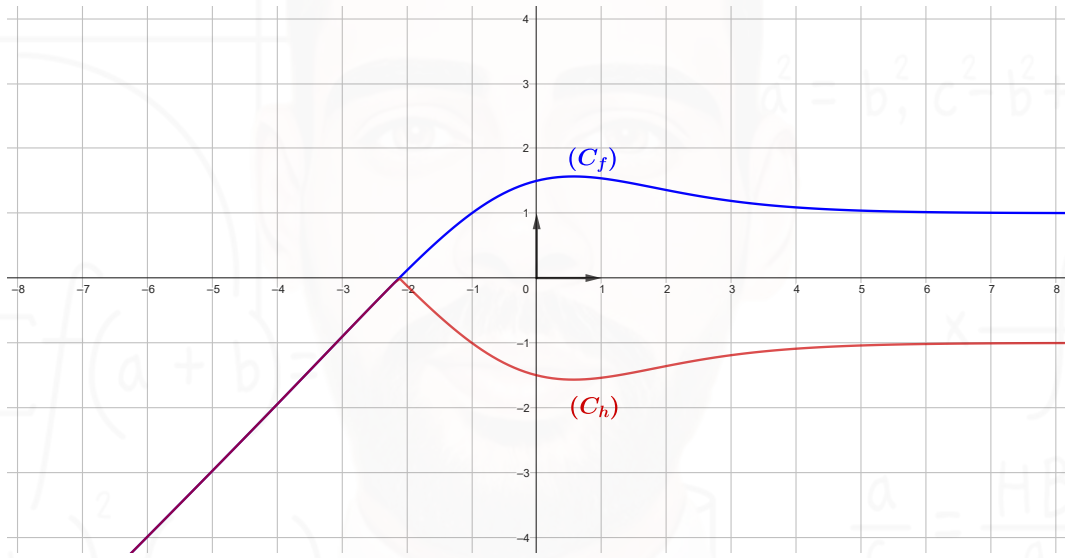
تكافئ: $h(x) = -|f(x)|$

ومنه:

$$h(x) = -|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ f(x) & ; f(x) \leq 0 \end{cases}$$

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \leq 0$

وينظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل إذا كان $f(x) \geq 0$



(الإنسان الذي لم يخطئ لم يجرب شيئاً جديداً)

