

التمرين : 20 نقطة

I. جدول التغيرات المقابل هو للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x + a)e^{-x} + b$.
حيث a و b عدنان حقيقيّان . باستعمال جدول التغيرات :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$		$2 + e^{-2}$	2

1. استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم بين أنّ : $a = -1$ و $b = 2$

2. بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α في المجال

$]-\infty; 2]$ ثمّ تحقق أنّ : $-0,38 < \alpha < -0,37$.

3. حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بين أنّ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2. أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3. بين أنّ : $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4. أ) بين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) .

5. بين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، ثم أكتب معادلة لـ (T) .

6. أرسم بدقّة (Δ) ، (T) و (C_f) .

7. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x = (1 - m)e^x$.

III. الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 2x - (x - 1)e^{-x+1}$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1. جد العدد الحقيقي β حتى يكون من أجل كلّ عدد حقيقي x : $h(x) = f(x - 1) + \beta$.

2. إشرح كيفية إنشاء (C_h) إنطلاقا (C_f) ثم أنشئه في المعلم السابق .

إرادة النجاح مهمة ، لكنّ الأهمّ منها هو التحضير للنجاح

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2024

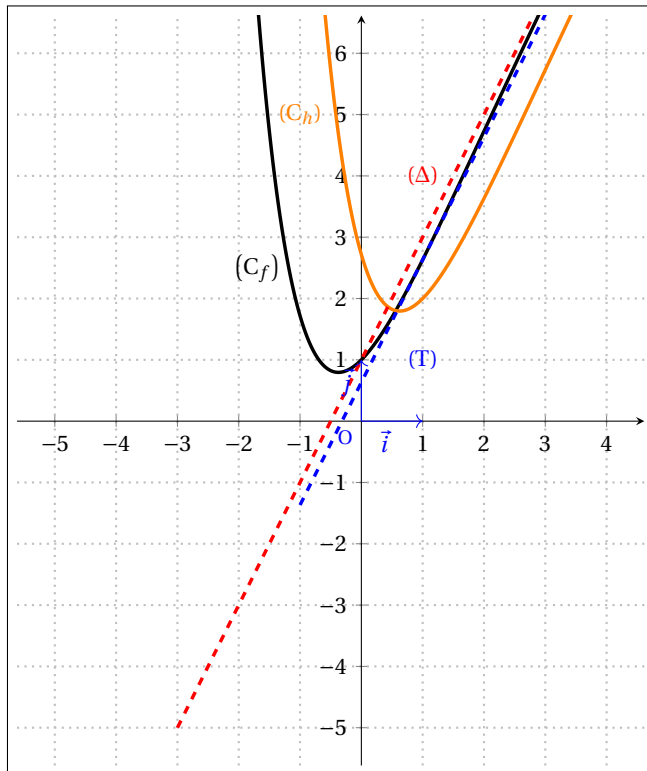
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		0	
الوضعية	(Δ) فوق (C_f)	يقطع (C_f) في النقطة $A(0; 1)$	(Δ) تحت (C_f)

(5) إثبات أن (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ) لدينا: الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ والدالتها المشتقة f' حيث $f'(x) = g(x)$

إذن $f'(x) = 2$ تكافئ $(x-1)e^{-x} + 2 = 2$ ومنه $x = 1$. أي يوجد مماس مواز ل (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

كتابة معادلة للمماس (T) : $y = 2x + 1 - e^{-1}$: (T)

(6) الرسم :



(7) مناقشة حلول المعادلة $x = (1-m)e^x$:

بالتبسيط والحساب نجد $f(x) = 2x + m$ ، حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = 2x + m$

- لما $m < 1 - e^{-1}$ لا توجد حلول .

- لما $m = 1 - e^{-1}$ حل موجب تماما .

- لما $1 - e^{-1} < m < 1$ حلان موجبان تماما .

- لما $m = 1$ حل معدوم .

- لما $m > 1$ حل سالب تماما .

III. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $h(x) = 2x - (x-1)e^{-x+1}$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

(1) من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = f(x-1) + \beta$ معناه : $\beta = 1$

(2) (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

الرسم : أنظر الشكل في المعلم السابق .

التمرين : I. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = (x+a)e^{-x} + b$

حيث a و b عدنان حقيقيان . باستعمال جدول التغيرات :

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$ ، ولدينا أيضا $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$ لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ و منه $b = 2$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = (-x+1-a)e^{-x}$

لدينا أيضا $g'(2) = 0$ بالتعويض نجد $a = -1$

(2) لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; 2]$ و

$0 \in]-\infty; 2 + e^{-2}]$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة

$g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 2]$ حيث

لدينا $]-\infty; 2 + e^{-2}] \subset]-0,38; -0,37]$ أي أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0,38; -0,37]$ و $g(-0,38) < 0 < g(-0,37)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

α في المجال $]-0,38; -0,37]$ حيث $g(\alpha) = 0$

(3) تحديد إشارة $g(x)$ حسب قيم x

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - \frac{x}{e^x} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(2 + \frac{1}{x} - e^{-x}) = +\infty$

(أ) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

(ب) لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) لدينا : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \alpha e^{-\alpha}$ ونعلم مسبقا أن $g(\alpha) = 0$ أي

$f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha-1}$ بالتعويض في عبارة $f(\alpha)$ نجد

بالتبسيط نجد $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha-1}$

نجد : $0,78 < f(\alpha) < 0,8$

(أ) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$ لأن :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

(ب) لدراسة الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ندرس إشارة

$f(x) - (2x+1)$ ، لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x} > 0$ و

عليه نلخص الوضع النسبي في الجدول الموالي :