

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (5 نقاط):

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة أساسها q و حدها الأول u_0 حيث :

$$\begin{cases} \ln(u_2) - \ln(u_4) = 4 \\ \ln(u_1) + \ln(u_5) = -12 \end{cases}$$

1) عين الأساس q و الحد الأول u_0 ثم أكتب عبارة u_n بدلالة n .

2) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + eu_1 + e^2u_2 + \dots + e^nu_n$

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

ب- احسب المجموع T_n و حيث: $T_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

ج- عين قيمة n حتى يكون $T_n^2 = 2^{30}$.

التمرين الثاني (6 نقاط):

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين (x, y) حيث: $4x - 9y = 5$.

1) تحقق أن الثنائية $(-10, -5)$ حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

2) A عدد طبيعي حيث $A = \overline{43}$ في نظام العد ذي الأساس x و $A = \overline{98}$ في نظام العد ذي الأساس

y حيث: $x \leq 35$ و $y \leq 15$

■ عين القيم الممكنة لـ x و y ثم أكتب A في النظام العشري

3) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 4^n على 9.

ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية لـ $2020^{2021} - 1442^{6n+2} + 2971$ على 9.

ج- عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) حيث: $2020^x + 4^y + 7 \equiv 0[9]$

التمرين الثالث (9 نقاط): نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2} - 1) & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ- أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0.

ب- أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ ، ماذا تستنتج؟

ج- أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

(2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

بأدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) نضع: $h(x) = f(x) - x$. بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,65 < \alpha < 0,7$.

(4) أحسب $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

(5) أ- أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) . ماذا تستنتج؟

(6) أنشئ (T) و (C_f) .

(7) ناقش بيانها و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $f(x) = -\frac{1}{2}x + e^m - 1$

(8) (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $U_0 = 0$ من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|U_n - \alpha| \leq \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ ، ماذا تستنتج؟

استافكم نتمنى لكم كل التوفيق و النجاح - بن صافية-

الإجابة النموذجية لاختبار الفصل الأولالتمرين الأول:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة أساسها q و حدها الأول u_0 حيث :

$$(1) \dots \begin{cases} \ln(u_2) - \ln(u_4) = 4 \\ \ln(u_1) + \ln(u_5) = -12 \end{cases}$$

(1) تعيين الأساس q و الحد الأول u_0 :

$$\begin{cases} \frac{u_2}{u_4} = e^2 \\ u_1 \times u_5 = e^{-12} \end{cases} \text{ لدينا: (1) تكافيء:}$$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة أساسها q فإن: $u_1 = u_0 \times q^1$ ، $u_4 = u_0 \times q^4$ ، $u_2 = u_0 \times q^2$ و $u_5 = u_0 \times q^5$ بالتعويض نجد:

$$\begin{cases} \frac{u_0 \times q^2}{u_0 \times q^4} = e^4 \\ u_0 \times q^1 \times u_0 \times q^5 = e^{-12} \end{cases} \text{ منه: } u_0 = 1 \text{ و } q = e^{-2}$$

عبارة u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ منه: $u_n = e^{-2n}$

(2) حساب المجموع S_n :

$$S_n = 1 + eu_1 + e^2u_2 + \dots + e^n u_n$$

نضع: $y_n = e^n u_n = e^{-n}$ المتتالية (y_n) متتالية

هندسية أساسها e^{-1} و حدها الأول $y_0 = 1$

$$S_n = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n \text{ منه: } = \left(\frac{1 - e^{-n+1}}{1 - e^{-1}} \right)$$

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد

طبيعي n بـ : $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$

أ- تبيان أن (v_n) متتالية حسابية: لدينا:

$$v_{n+1} - v_n = \ln u_{n+1} + \ln u_{n+2} - \ln u_n - \ln u_{n+1}$$

$$= \ln \left(\frac{u_{n+2}}{u_n} \right) = \ln \left(\frac{e^{-2(n+2)}}{e^{-2n}} \right)$$

$$= \ln(e^{-2n-4+2n}) = -4$$

منه (v_n) متتالية حسابية أساسها (-4)

ب- حساب المجموع T_n :

$$T_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$= \frac{n+1}{2} (v_0 + v_n)$$

$$= \frac{n+1}{2} (-2 - 4n - 2)$$

$$= (n+1)(-2-2n)$$

ج- تعيين قيمة n حتى يكون $T_n^2 = 2^{30}$:

$$\text{لدينا } (T_n)^2 = ((n+1)(-2-2n))^2 \text{ منه:}$$

$$((n+1)(-2-2n))^2 = 2^{30}$$

$$(-2(n+1))^2 = 2^{30}$$

$$2^2 (n+1)^4 = 2^{30}$$

$$(n+1)^4 = 2^{28}$$

$$(n+1) = 2^7$$

$$n = 127$$

التمرين الثاني:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين

$$(x, y) \text{ حيث: } 4x - 9y = 5$$

(1) التحقق أن الثنائية $(-10, -5)$ حل للمعادلة

(E) و حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) :

لدينا: $4(-10) - 9(-5) = 5$ منه: الثنائية

$(-10, -5)$ حل للمعادلة (E) .

$$\text{الحل: } \begin{cases} 4x - 9y = 5 \\ 4(10) - 9(5) = -5 \end{cases} \text{ بالجمع نجد:}$$

$$4(x - 10) = 9(y + 5)$$

حسب غوص 4 يقسم $(y + 5)$ أي:

$$y = 4k - 5 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 9k - 10 \quad k \in \mathbb{Z} \text{ بالتعويض نجد:}$$

(2) A عدد طبيعي حيث $A = \overline{43}$ في نظام العد ذي الأساس x و $A = \overline{98}$ في نظام العد ذي الأساس y حيث: $x \leq 35$ و $y \leq 15$ القيم الممكنة لـ x و y و كتابة A في النظام العشري

k	2	3	4	5
x	8	17	26	35
y	3	7	11	15
A	35	71	107	143

(3) أ- دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 4^n على 9.

k	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
البواقي	1	4	7

ب- باقى القسمة الإقليدية لـ $2020^{2021} - 1442^{6n+2} + 2971$ على 9:

لدينا: $2020 \equiv 4 [9]$ و $2021 = 3 \times 673 + 2$ منه: $2020^{2021} \equiv 4^{3 \times 673 + 2} [9]$ أي: $2020^{2021} \equiv 7 [9]$

و لدينا: $1442 \equiv 2 [9]$ و $1442^{6n+2} = (1442^2)^{3n+1}$ منه: $1442^{6n+2} \equiv 4 [9]$ لدينا: $2971 \equiv 1 [9]$ منه:

$$2020^{2021} - 1442^{6n+2} + 2971 \equiv (7 - 4 + 1) [9]$$

$$\text{أي: } 2020^{2021} - 1442^{6n+2} + 2971 \equiv 4 [9]$$

ج- تعيين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة

$$(E) \text{ حيث: } 2020^x + 4^y + 7 \equiv 0 [9]$$

$$2020^x = 2020^{9k-10} = 2020^{3(3k-4)+2} \equiv 7 [9]$$

$$\text{و } 7 \equiv 7 [9] \text{ منه:}$$

$$2020^x + 4^y + 7 \equiv (14 + 4^y) [9]$$

$$4^y \equiv 4 [9]$$

$$\text{أي: } y = 3k' + 1 \text{ منه: } 4k - 5 = 3k' + 1 \text{ منه:}$$

$$4k = 3k' + 6 = 3(k' + 2)$$

حسب غوص 3 يقسم k أي:

$$(x, y) = (9k - 10; 4k - 5) \text{ مع: } k = 3k' \text{ و } k' \in \mathbb{N}^*$$

التمرين الرابع:

(1) أ- تبيان أن الدالة f مستمرة عند 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ ومنه: f مستمرة عند 0 .

(1) ب- دراسة قابلية اشتقاق f عند 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2} = f'(0)$ ومنه: f قابلة للاشتقاق عند 0 .

(2) أ- حساب الدالة المشتقة:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} \text{ ودالتها المشتقة:}$$

(2) ب- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x^2 \geq 0$ ومنه: $\sqrt{1+x^2} \geq 1$ و $1 + \sqrt{1+x^2} \geq 2$

$$\text{أي: } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} \leq \frac{1}{2} \text{ أي: } \sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2}) \geq 2$$

$$\text{أي: } |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \text{ ومنه: } \left| \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} \right| \leq \frac{1}{2}$$

(2) جـ- جدول تغيرات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) < 0$ ومنه: f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	2	0

(3) تبيان أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,65 < \alpha < 0,7$:

نضع: $h(x) = f(x) - x$. دالتها المشتقة $h'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h'(x) = f'(x) - 1$.
لدينا من (2) بـ: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ أي: $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ أي: $-\frac{3}{2} \leq f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2}$.
أي: $-\frac{3}{2} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2}$ ومنه: $h'(x) < 0$. h متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

مبرهنة القيم المتوسطة: الدالة h مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0,65 ; 0,7[$ و $h(0,65) \times h(0,7) = 0,053 \times (-0,015) < 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ ($f(x) = x$) تقبل حلا وحيدا

α حيث $0,65 < \alpha < 0,7$ مع: $f(\alpha) = \alpha$.

(4) أ- حساب $f(-x) + f(x)$:

من أجل x من $\mathbb{R}$ و $(-x)$ من $\mathbb{R}$: $f(-x) + f(x) = 2$.

التفسير الهندسي: النقطة $\omega(0 ; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

(4) ب- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0:

$$(T) : y = -\frac{1}{2}x + 1$$

(4) جـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) :

$$f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{x^3}{2(\sqrt{1+x^2} + 1)^2}$$

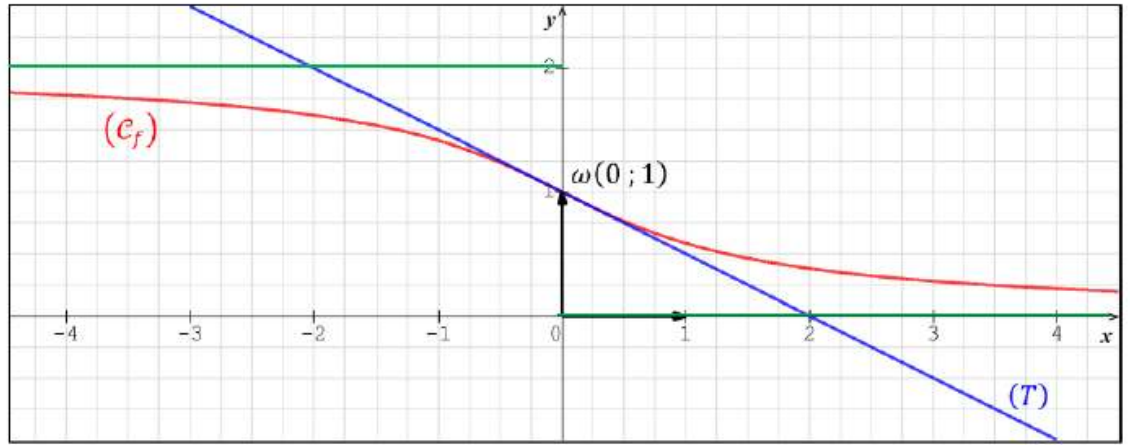
الوضعية:

• $x < 0$: (C_f) يقع تحت (T) (أسفل).

• $x = 0$: (C_f) يقطع (يخترق) (T) في النقطة $\omega(0 ; 1)$.

• $x > 0$: (C_f) يقع فوق (T) (أعلى).

(5) إنشاء (T) و (C_f) :



(6) أ- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. وعليه:

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| ; f(\alpha) = \alpha$$

(6) ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $|u_n - \alpha| \leq \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1 - \alpha|$$

...

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$$

$$|u_n - \alpha| \leq \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(6) ج- تبين أن المتتالية (u_n) متقاربة وحساب نهايتها:

متتالية متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ (باستعمال النهايات بالمقارنة).

مناقشة عدد و اشارة حلول المعادلة: $f(x) = -\frac{1}{2}x + e^m - 1$

حلول المعادلة $f(x) = -\frac{1}{2}x + e^m - 1$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + e^m - 1$

مناقشة مائلة بالتوازي مع (T)

$e^m - 1$	-1	1	$+\infty$
عدد و اشارة الحلول	حل وحيد سالب	حل وحيد معدوم	حل وحيد موجب
m	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
عدد و اشارة الحلول	حل وحيد سالب	حل وحيد معدوم	حل وحيد موجب