

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^x + 2e^{-x} - 3$. اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة مع التعليل.

الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)	
0 و $\ln 2$	0 و $-\ln 2$	0 و $\ln 3$	1 حلّي المعادلة $f(x) = 0$ هما
$-\infty$	$+\infty$	-3	2 نهاية $f(x)$ عندما x يؤول إلى $+\infty$ هي
متزايدة تماما	متناقصة تماما	ليست رتيبة	3 على المجال $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right]$ الدالة f
1	2	-1	4 m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0; 2]$ ، مدور m إلى الوحدة هو :

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

(V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $V_0 = 18$ والعلاقة: $V_0 + V_1 + V_2 = 38$.

1/ بيّن أنّ أساس المتتالية (V_n) هو $q = \frac{2}{3}$.

2/ أ) اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n .

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (V_n) .

ج) احسب نهاية (V_n) .

3/ نضع $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$.

أ) احسب S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

ب) جد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الجدول التالي يعطي توزيع 500 تلميذ في إحدى الثانويات.

التلميذ	ذكور	إناث
يملك هاتف نقال	60	240
لا يملك هاتف نقال	120	80

نختار عشوائيا تلميذا من الثانوية ونسمي H الحادثة: " التلميذ المختار ذكرا " ، F الحادثة: "التلميذ المختار أنثى " ، S الحادثة: "التلميذ يملك هاتف نقالا " ، $\bar{S}$ الحادثة: "التلميذ لا يملك هاتف نقالا " .

(1) شكّل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة.

(2) احسب احتمال الحوادث التالية:

أ) التلميذ المختار أنثى وتملك هاتف نقالا.

ب) التلميذ المختار لا يملك هاتف نقالا.

(3) نفرض أنّ التلميذ المختار لا يملك هاتف نقالا. ما هو احتمال أن يكون هذا التلميذ ذكرا ؟

التمرين الرابع: (07,5 نقطة)

I) g دالة عددية معرفّة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = ax + b + \ln x$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

(1) عيّن a و b بحيث: $g(1) = 2$ و $g'(2) = \frac{3}{2}$.

(2) نضع: $g(x) = x + 1 + \ln x$.

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها.

ج- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً حقيقيا وحيدا α حيث: $0,2 < \alpha < 0,3$.

د- حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (يُعطى: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$).

(3) تحقق أنّ: $f(\alpha) = -\alpha$ ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

(4) احسب $f(1)$ و $f(5)$ ثم ارسم (C_f) على المجال $]0; 5]$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الجدول التالي يبيّن كمية الإنتاج السنوي بآلاف الأطنان من البطاطا لتعاونية فلاحية ما بين سنتي 2010 و 2015 .

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	2015
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6
كمية المنتج بآلاف الأطنان y_i	25	30	33	42	48	55

- (1) مثل سحابة النقط $(x_i; y_i)$ في معلم متعامد و ومتجانس حيث على محور الفواصل كل $1cm$ يمثل سنة واحدة و على محور الترتيب كل $1cm$ يمثل 10 آلاف طن.
- (2) احسب إحداثيات النقطة المتوسطة G ثم علّمها.
- (3) أ- اكتب معادلة من الشكل $y = ax + b$ لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا. (تدور a و b إلى 10^{-2}).
ب- أنشئ المستقيم (Δ) .
- (4) باستعمال هذا التعديل:
أ- احسب كمية إنتاج التعاونية سنة 2020 .
ب- في أي سنة يتجاوز الإنتاج 120 ألف طن ؟

التمرين الثاني: (05 نقاط)

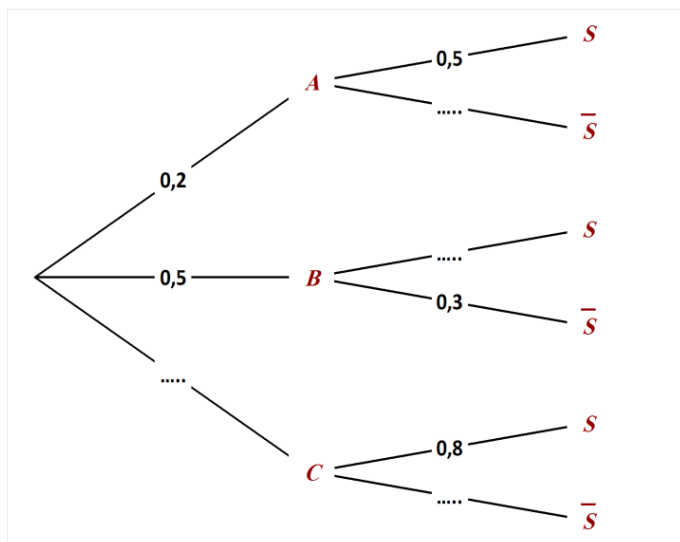
نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 5$ و $U_{n+1} = \frac{4}{7}U_n + \frac{3}{7}$.

- (1) احسب الحدين U_1 و U_2 .
- (2) أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n: U_n > 1$.
ب- بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما.
ج- ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (U_n) ؟
- (3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n - 1$.
أ- بيّن أنّ (V_n) متتالية هندسية مُعيّنة أساسها و حدّها الأول.
ب- اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$.
ج- احسب نهاية (U_n) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- وكالة أسفار تقترح على زبائنها ثلاث وجهات A ، B و C .
- 20% من الزبائن اختاروا الوجهة A ، 50% اختاروا الوجهة B والباقي اختار الوجهة C .
- عند العودة من السفر أجرت الوكالة استجوابا لزبائنها حول مدى إعجابهم بالوجهة واستنتجت ما يلي:
- 50% من أصحاب الوجهة A كانوا معجبين بها.
- 30% من أصحاب الوجهة B كانوا غير معجبين بها.
- 80% من أصحاب الوجهة C كانوا معجبين بها.

نختار عشوائيا أحد الزبائن ونسجل الحوادث التالية:



S : الزبون معجب بالوجهة المختارة

و $\bar{S}$: الزبون غير معجب بالوجهة المختارة.

(1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكمل القيم الناقصة.

(2) أ- احسب احتمالات الحوادث الآتية:

$A \cap S$ ، $B \cap S$ و $C \cap S$

ب- استنتج احتمال أن يكون الزبون معجب بالوجهة المختارة.

(3) نستجوب زبونا غير معجب بالوجهة المختارة،

ما احتمال أن يكون من أصحاب الوجهة B ؟

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = -4 + 2x(1 + \ln x)$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$. (تُعطى: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$).

(2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على $]0; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(3) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1,4 < \alpha < 1,5$.

(4) حدّد إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = (2x - 4) \ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. فسّر النتيجة هندسياً.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(3) عيّن نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

(4) أ- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب- أنشئ (T) و (C_f) . (تُعطى: $f(\alpha) \approx -0,41$).

(5) نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $F(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x$.

أ- بيّن أنّ F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x = 2$ و $x = 1$ ، $y = 0$

انتهى الموضوع الثاني

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
04		التمرين الأول: (04 نقاط)
	01	1 / الاقتراح الأول الإجابة أ / مع التبرير
	01	2 / الاقتراح الثاني الإجابة ب / مع التبرير
	01	3 / الاقتراح الثالث الإجابة أ / مع التبرير
	01	4 / الاقتراح الرابع الإجابة أ / مع التبرير
04,5		التمرين الثاني: (04,5 نقطة)
	01	1 / إثبات أن أساس المتتالية $q = \frac{2}{3}$ (نحل للمعادلة $q^2 + q - \frac{10}{9} = 0$ و $q > 0$).
	0,50	2 / عبارة الحد العام $V_n = 18 \left(\frac{2}{3} \right)^n$.
	0,50	ب (V_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.
	0,50	ج / $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$
	01	3 / أ $S_n = 54 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$ استنتاج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 54$.
	01	ب $S_n = \frac{3510}{81}$ فإن $n = 4$.
1,50		التمرين الثالث: (04 نقاط)
	1,50	1 / شجرة الاحتمالات.
		<pre> graph TD Root(()) -- 9/25 --> H((H)) Root -- 16/25 --> F((F)) H -- 1/3 --> HS((S)) H -- 2/3 --> HSB((S-bar)) F -- 3/4 --> FS((S)) F -- 1/4 --> FSB((S-bar)) </pre>

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
02,5	0,75	2/ أ) احتمال أن يكون التلميذ المختار أنثى وتملك هاتفا نقالا هو $p(F \cap S) = \frac{12}{25}$.
	01	ب) احتمال أن يكون التلميذ المختار لا يملك هاتفا نقالا هو $p(\bar{S}) = \frac{2}{5}$.
	0,75	3/ احتمال أن يكون التلميذ المختار ذكرا علما أنه لا يملك هاتفا نقالا هو $p_{\bar{S}}(H) = \frac{p(H \cap \bar{S})}{p(\bar{S})} = \frac{3}{5}$.
07,5		التمرين الرابع: (07,5 نقطة)
	0,75	(I) 1/ تعيين a ، b : $g'(x) = a + \frac{1}{x}$; $a=1$ و $b=1$.
	2×0,5	(2) أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$.
	01	ب) g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ جدول التغيرات .
	0,75	ج) إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 < \alpha < 1$.
	0,50	د) إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.
	01	(II) 1/ إثبات أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ f متناقصة تماما على $]0; \alpha[$ ومتزايدة تماما على $[\alpha; +\infty[$.
	01	2/ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.
	0,5 0,25	3/ التحقق أن $f(\alpha) = -\alpha$. - جدول التغيرات.
	0,75	4/ رسم المنحنى (C_f) .

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
04		التمرين الأول: (04 نقاط)
	0,50	1/ تمثيل السحابة.
	0,75	2/ $G(3,5;38,83)$ مع التعليم
	01,25	3/ أ) $y = 6,09x + 17,52$. (نقبل النتائج المقربة لقيمتي العددين a و b ؛ و ما يترتب عنهما من حسابات في السؤال 4/)
	0,25	ب) رسم مستقيم الانحدار.
	0,75	4/ أ) كمية الإنتاج سنة 2020 هي 84510 طن.
	0,50	ب) يتجاوز الإنتاج 120 ألف طن سنة 2026.
05		التمرين الثاني: (05 نقاط)
	01	1/ $U_2 = \frac{113}{49}$ ، $U_1 = \frac{23}{7}$
	01	2/ أ) البرهان بالتراجع.
	0,75	ب) إثبات أن المتتالية متناقصة.
	0,50	ج) المتتالية متقاربة.
	01	3/ أ) (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{7}$ و حدها الأول $V_0 = 4$.
	0,50	ب) من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$ و $U_n = 4\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1$.
	0,25	ج) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$.
01		التمرين الثالث: (04 نقاط)
	01	1/ نقل و إتمام الشجرة

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
03	01,50	1/ أ) $p(A \cap S) = 0,1$ و $p(B \cap S) = 0,35$ و $p(C \cap S) = 0,24$
	0,75	ب) $p(S) = 0,69$
	0,75	3/ $p_{\bar{S}}(B) = 0,48$
07		التمرين الرابع: (07 نقاط)
	0,50	1/ I $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -4$
	0,50	2/ دراسة اتجاه التغير: $g'(x) = 4 + 2\ln x$
	0,25	g متناقصة تماما على المجال $[0; e^{-2}]$ و متزايدة تماما على المجال $[e^{-2}; +\infty[$. جدول التغيرات.
	0,50	3/ إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد.
	0,50	4/ إشارة $g(x)$: $+\quad 0 \quad - \quad \alpha \quad + \quad +\infty$
	0,50	II / 1 أ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ المنحنى يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$
	0,25	ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
	0,50	2/ أ) تبيان أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$
	0,50	ب) دراسة اتجاه التغير: الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0; \alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$. جدول التغيرات.
	0,50	3/ نقط التقاطع مع محور الفواصل.
	0,50	4/ أ) $(T): y = -2x + 2$
	0,75	ب) الرسم
	0,50	5/ أ) إثبات أن F أصلية للدالة f
	0,50	ب) $A = 0,27ua$