

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية المسيلة
ثانوية: المجاهد طويري محمد
دورة ماي 2021

وزارة التربية الوطنية
إمتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي
الشعبة: تقني رياضي - هندسة الطرائق -

المدة: 04 سا و 30 د

إختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (I) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لـ 3^n على 5.
- (II) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r حيث: u_0 و r عددان طبيعيين.
- (1) اوجد كل من u_0 و r ، علما أن u_0 و r أوليان فيما بينهما ويحققان: $(u_0)^2 = u_{10} - u_1$.
- (2) عبر بدلالة العدد الطبيعي n عن المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- (3) عبر بدلالة العدد الطبيعي n عن الجداء P_n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$.
- (4) عين العدد الطبيعي m حيث: $2P_m = 2023!$ ، ثم تحقق أن $3^m \equiv 1[5]$.
- (5) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق:
- $$\begin{cases} 2S_n + 8 \equiv 3^{1962}[5] \\ 10 < n < 30 \end{cases}$$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- (I) $p(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $p(z) = z^3 + 8$
- (1) احسب $p(-2)$ ، ثم عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل $z \in \mathbb{C}$: $p(z) = (z+2)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
- (2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$.
- (II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B و C ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = -2$.
- (1) اكتب كلا من: z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.
- (2) أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.

- (ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (ج) تحقق أن النقطة O هي مركز ثقل المثلث ABC .
- (3) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$.
- (4) لتكن (Γ) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث: $z + 2 = ke^{i\frac{\pi}{6}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$.
- تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين المجموعة (Γ) .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء، كل الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس. ونسحب من الكيس 3 كرات عشوائيا دفعة واحدة.

- (1) احسب احتمال كل من الأحداث التالية:
- A : "الكرات المسحوبة كلها حمراء".
- B : "الحصول على كرة حمراء واحدة فقط في السحب".
- C : "الحصول على كرة بيضاء على الأقل".
- D : "الكرات الثلاث المسحوبة من ألوان مختلفة".
- (2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث: $(n \geq 2)$ ، ثم نسحب كرتين على التوالي وبدون إرجاع.
- نفرض أن سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة، وسحب كرة سوداء يساوي $(+5)$ نقطة. وليكن X هو المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها.
- (أ) اكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.
- (ب) عين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة.
- (ج) ماهو عدد الكرات السوداء المختارة حتى تكون اللعبة مربحة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.

- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- (2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2.5 < \alpha < 2.7$. ثم إستنتج إشارة $g(x)$ حسب x .

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$. ثم فسر النتائج هندسيا.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{2}{(x-1)^2}$.

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R} - \{1\}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ذات الفاصلة β حيث: $-1 < \beta < 0$.

(5) بين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(6) احسب $f(0)$. ثم ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم السابق.

(7) ليكن m وسيط حقيقي، عين بيانيا مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة: $f(x) = x + m$ حلين مختلفين.

(III) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1; -1\}$ كما يلي: $h(x) = f(|x|)$. و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(1) بين أن h دالة زوجية.

(2) اشرح كيفية إنشاء (C_h) ، ثم أنشئه.

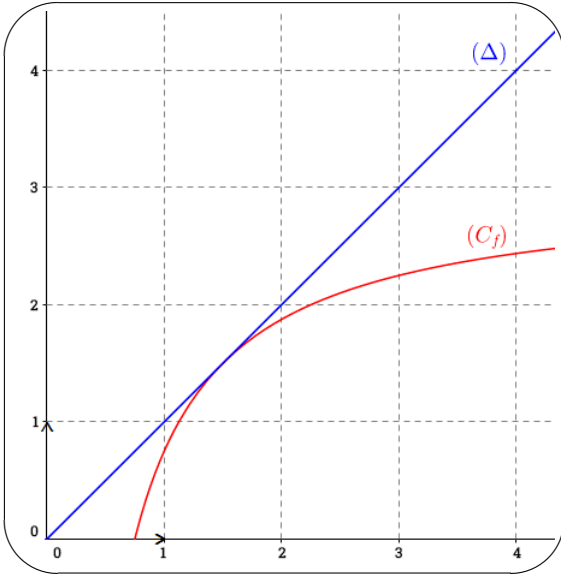
إنتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 3 - \frac{9}{4x}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$.
المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بجدها الأول u_0 حيث $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.



(1) أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل.

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{3}{2}$.

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة، وعين نهايتها.

(4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي:
$$v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{2}{3}$.

(ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$

(5) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع التالي: $S_n = u_n v_n + u_{n+1} v_{n+1} + u_{n+2} v_{n+2} + \dots + u_{n+2021} v_{n+2021}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$: $3x - 5y = 1$ حيث x و y عددان صحيحان.

(1) أ) عين $(x_0; y_0)$ حل المعادلة (E) الذي يحقق $\ln(x_0 - y_0) = 0$.

(ب) استنتج حلول المعادلة (E) .

(2) a و b عددان صحيحان و λ العدد الصحيح الذي يحقق:
$$\begin{cases} \lambda = 3b + 2 \\ \lambda = 5a + 3 \end{cases}$$

أ) بين أن $(b; a)$ حل المعادلة (E) .

(ب) عين باقي القسمة القليدية للعدد λ على 15.

$$(3) \begin{cases} n \equiv -1[3] \\ n \equiv 3[5] \end{cases} \text{ عدد طبيعي يحقق:}$$

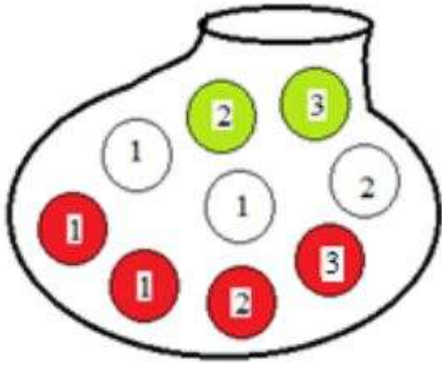
• عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2021$.

(4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 3 \alpha 03}$ في نظام تعداد أساسه 6.

أ) عين α و β حيث الثنائية $(\alpha; \beta)$ حل للمعادلة (E).
ب) اكتب N في النظام العشري.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) كيس يحوي تسع كريات (لا نفرق بينها باللمس)، ثلاثة بيضاء مرقمة 1، 1 و 2 وأربعة حمراء مرقمة 1، 1، 2 و 3 واثنان خضراء مرقمة 2 و 3. نسحب عشوائياً على التوالي بدون ارجاع 3 كريات من هذا الكيس.



- (1) ماهو عدد السحبات الممكنة.
- (2) احسب احتمال كل من الأحداث التالية:
A: "سحب كرية من كل لون".
B: "سحب كريات من نفس اللون".
C: "سحب كريات تحمل نفس الرقم".
D: "سحب كريات تحمل نفس الرقم ومختلفة في اللون".

(II) نسحب من الكيس السابق كرتين في آن واحد ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع الرقمين اللذان تحملانهما الكرتين المسحوبتين.

- (1) عين قيم المتغير العشوائي X .
- (2) حدد قانون احتمال X .
- (3) احسب كل من الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln(x)$.

- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.
- (2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العدد f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x + e - \frac{2 \ln(x)}{x}$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا. و احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

(3) استنتج إشارة $f'(x)$. ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(4) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x + e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(5) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم المقارب المائل (Δ) ، ثم جد معادله له.

(6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث: $2 < \beta < 2.1$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $]0; +\infty[$.

(7) ارسم المستقيم (Δ) ، المماس (T) و (C_f) .

(8) ليكن m وسيطا حقيقيا، ناقش بيانيا حسب m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $x(e - m) = \ln(x^2)$.

إنتهى الموضوع الثاني

✍ الإرادة الصادقة للإنسان...

تشبه قوة خفية تسير خلف ظهره، وتدفعه دفعا للأمام على طريق النجاح...
وتتناهى مع الوقت حتى تمنعه من التوقف أو التراجع.

😊 بالتوفيق والنجاح في شهادة بكالوريا 2021. 😊
أتمنى لكم حياة جامعية أفضل ... 🎓



تصحيح الموضوع الأول

حل التمرين الأول 04 ن

(I) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي

القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5: 1 ن

$\triangleleft$ من أجل $n = 0$ نجد: $3^0 \equiv 1[5]$

$\triangleleft$ من أجل $n = 1$ نجد: $3^1 \equiv 3[5]$

$\triangleleft$ من أجل $n = 2$ نجد: $3^2 \equiv 4[5]$

$\triangleleft$ من أجل $n = 3$ نجد: $3^3 \equiv 2[5]$

$\triangleleft$ من أجل $n = 4$ نجد: $3^4 \equiv 1[5]$

ومنه بواقي القسمة تشكل متتالية دورية دورها 4. نلخص
بواقي قسمة 2^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	3	4	2	[5]

ومنه:

$\triangleleft$ بواقي قسمة 2^{4k} على 5 هي 1.

$\triangleleft$ بواقي قسمة 2^{4k+1} على 5 هي 3.

$\triangleleft$ بواقي قسمة 2^{4k+2} على 5 هي 4.

$\triangleleft$ بواقي قسمة 2^{4k+3} على 5 هي 2.

(II)

1 إيجاد كل من u_0 و r : 0.5 ن

علما أن u_0 و r أوليان فيما بينهما ويحققان:

$$(u_0)^2 = u_{10} - u_1$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 + nr$

$$(u_0)^2 = u_{10} - u_1$$

$$(u_0)^2 = (u_0 + 10r) - (u_0 + r)$$

$$(u_0)^2 = 9r$$

لدينا: $(u_0)^2 = 9r$ معناه: u_0 يقسم $9r$.

وبما أن u_0 و r أوليان فيما بينهما فإنه حسب غوص
 u_0 يقسم 9 ومنه: $u_0 = \{1; 3; 9\}$.

$\triangleleft$ من أجل: $u_0 = 1$ نجد: $9r = 1$ أي: $r = \frac{1}{9}$
مرفوض لأن r عدد طبيعي.

$\triangleleft$ من أجل: $u_0 = 3$ نجد: $9r = 9$ أي: $r = \frac{9}{9}$ ومنه:
 $r = 1$ مقبول لأن 3 و 1 أوليان فيما بينهما.

$\triangleleft$ من أجل: $u_0 = 9$ نجد: $9r = 81$ أي: $r = \frac{81}{9}$
ومنه: $r = 9$ مرفوض لأن 9 و 9 غير أوليان فيما
بينهما.

2 التعبير بدلالة n عن المجموع S_n : 0.5 ن

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = \frac{(n+1)}{2} (u_0 + u_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2} (n+1) (n+6)$$

3 التعبير بدلالة n عن الجداء P_n : 0.5 ن

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$$

$$P_n = u_0 \times (u_0 + r) \times \dots \times (u_0 + nr)$$

$$P_n = 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n+3)$$

$$1 \times 2 \times P_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n+3)$$

$$P_n = \frac{(n+3)!}{2!}$$

4 تعيين العدد الطبيعي m حيث: $2P_m = 2023!$

0.25 ن

$$2P_m = 2023! \text{ معناه: } (m+3)! = 2023!$$

$$m = 2020$$

لدينا:

$$p(z) = (z - 2)(z^2 + \alpha z + \beta) \\ = z^3 + (\alpha + 2)z^2 + (2\alpha + \beta)z + 2\beta$$

بالمطابقة نجد: $\alpha = -2$ و $\beta = 4$.

إذن: $p(z) = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$

2 حل في C المعادلة $p(z) = 0$: 0.5 ن

لدينا: $p(z) = 0$ معناه: $(z + 2)(z^2 - 2z + 4) = 0$

$$\begin{cases} (z + 2) = 0 \\ (z^2 - 2z + 4) = 0 \end{cases} \text{ معناه:}$$

$$\begin{cases} z = -2 \\ z^2 - 2z + 4 = 0 \end{cases} \text{ معناه:}$$

نحل المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$

أي نجد: $\Delta = -12 = 12i^2 = (2i\sqrt{3})^2$

إذن للمعادلة حلان مترافقان هما:

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

وبالتالي: $S = \{-2; 1 - i\sqrt{3}; 1 + i\sqrt{3}\}$

(II)

1 كتابة كلا من: z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي:

0.75 ن

لدينا: $z_A = |z_A|e^{i\arg(z_A)} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ولدينا: $z_B = |z_B|e^{i\arg(z_B)} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ولدينا: $z_C = |z_C|e^{i\arg(z_C)} = 2e^{i\pi}$

2 كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الجبري:

0.5 ن

لدينا:

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 2}{1 - i\sqrt{3} + 2} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} \\ = \frac{(3 + i\sqrt{3})^2}{12} = \frac{9 - 3 + 6i\sqrt{3}}{12} \\ = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

• التحقق أن $3^m \equiv 1[5]$: 0.25 ن

من السؤال الأول نقسم العدد 2020 على الدور 4 فنجد:

$$2020 = 505 \times 4 \text{ أي من الشكل } 4k.$$

$$\text{ومنه: } 3^{2020} \equiv 1[5]$$

5 تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق:

$$1 \text{ ن } \begin{cases} 2S_n + 8 \equiv 3^{1962}[5] \\ 10 < n < 30 \end{cases}$$

لدينا: $3^{1962} \equiv 4[5]$ ومنه: $2S_n + 8 \equiv 4[5]$

$$\text{أي: } (n + 1)(n + 6) + 8 \equiv 4[5]$$

$$\text{أي: } n^2 + 7n + 6 + 8 \equiv 4[5]$$

$$\text{أي: } n^2 + 7n + 14 \equiv 4[5]$$

ولدينا: $7n \equiv 2n[5]$ و $14 \equiv 4[5]$.

إذن: $n^2 + 2n \equiv 0[5]$ أي: $n^2 + 2n + 4 \equiv 4[5]$

$$\text{أي: } n(n + 2) \equiv 0[5]$$

معناه $n \equiv 0[5]$ أو $(n + 2) \equiv 0[5]$

معناه $n = 5k$ أو $n = 5k + 3$.

لكن: $10 < n < 30$

ومنه: $10 < 5k < 30$ أي $2 < k < 6$

أو $10 < 5k + 3 < 30$ أي $7 < 5k < 27$

$$\text{أي } \frac{7}{5} < k < \frac{27}{5}$$

إذن: $k \in \{2; 3; 4; 5\}$

وعليه: $n \in \{15; 20; 25; 13; 18; 23; 28\}$

حل التمرين الثاني 05 ن

(I)

1 حساب $p(-2)$: 0.25 ن

$$p(z) = (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$$

• تعيين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل

$$0.5 \text{ ن } p(z) = (z + 2)(z^2 + \alpha z + \beta) \quad ; z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{n}{3} = -\frac{n}{3} + 2k \text{ أي: } \frac{n\pi}{3} = -\frac{n\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\frac{n}{3} = \frac{-n + 6k}{3} \text{ أي:}$$

$$6n = 18k \text{ ومنه: } 3n = -3n + 18k$$

$$\text{وبالتالي: } n = 3k \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

4 لدينا $\mathbb{R}_+^*$ k مع $(\Gamma) : z + 2 = ke^{i\frac{\pi}{6}}$

0.25 ن • التحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) :

لدينا: $A \in (\Gamma)$ معناه:

$$z_A + 2 = 1 + i\sqrt{3} + 2 = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

وبالتالي: $A \in (\Gamma)$.

0.5 ن • تعيين المجموعة (Γ) :

$$\text{لدينا: } (\Gamma) : z + 2 = ke^{i\frac{\pi}{6}} \text{ أي: } (\Gamma) : z - z_C = ke^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{ومنه: } \arg(z - z_C) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{معناه: } (\vec{u}; \vec{CM}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ومنه المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم الذي مبدأه النقطة C ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل الفواصل (المحور الحقيقي) بإستثناء النقطة C .

حل التمرين الثالث 04 ن

1 حساب إحتمال كل من الأحداث التالية:

1.5 ن

عدد الحالات الممكنة هو: C_8^3

$$\text{ومنه: } C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

$$\text{ومنه نجد: } p(A) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}$$

$$\text{ونجد: } p(B) = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{5 \times 3}{56} = \frac{15}{56}$$

نلاحظ أن الحدث C هو الحدث العكسي للحدث A ,

$$\text{أي: } p(C) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$$

الحدث D هو الحدث المستحيل، ومنه: $p(D) = 0$

• كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسّي:

0.5 ن

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right) = \frac{\pi}{3} \end{array} \right. \text{ لدينا:}$$

$$\text{ومنه: } \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب استنتاج طبيعة المثلث ABC : 0.25 ن

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \text{ لدينا:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} CA = CB \\ (\vec{CB}; \vec{CA}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \text{ معناه:}$$

إذن: المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ج التحقق أن O هي مركز ثقل المثلث ABC :

0.5 ن

النقطة O هي مركز ثقل المثلث ABC

معناه أن O هي مرشح الجملة المثقلة:

$$\{(A; 1), (B; 1), (C; 1)\}$$

لنحسب لاحقة مرشح الجملة:

$$z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} - 2}{3}$$

$$= \frac{0}{3} = 0$$

وبالتالي O هي مركز ثقل المثلث ABC

3 تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$

0.5 ن

$$\text{لدينا: } (z_A)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^n = 2^n \times e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

$$\text{و } (z_B)^n = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^n = 2^n \times e^{-i\frac{n\pi}{3}}$$

$$\text{إذن: } (z_A)^n = (z_B)^n$$

$$\text{معناه: } \arg[(z_A)^n] = \arg[(z_B)^n]$$

• حساب الأمل الرياضي $E(X)$: 0.5 ن

لدينا:

$$E(X) = \frac{-400 - 50n + 10(n^2 - n)}{(n+5)(n+4)}$$

$$= \frac{10n^2 - 60n - 400}{(n+5)(n+4)}$$

تعيين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة:

0.5 ن

تكون اللعبة عادلة إذا كان: $E(X) = 0$

$$10n^2 - 60n - 400 = 0$$

نحسب المميز Δ نجد: $\Delta = 19600$

ومنه للمعادلة حلان:

$$n_1 = \frac{60 - \sqrt{19600}}{2 \times 10} = \frac{-80}{20} = -40$$

(مرفوض).

$$n_2 = \frac{60 + \sqrt{19600}}{2 \times 10} = \frac{200}{20} = 10$$

تكون اللعبة عادلة من أجل $n = 10$

عدد الكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة:

0.5 ن

تكون اللعبة مربحة إذا كان: $E(X) > 0$

$$10n^2 - 60n - 400 > 0 \text{ ومنه: } n > 10$$

إذن ينبغي أن نضع على الأقل 11 كرة سوداء حتى تكون اللعبة مربحة.

حل التمرين الرابع 07 ن

(I)

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$: 0.25 ن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

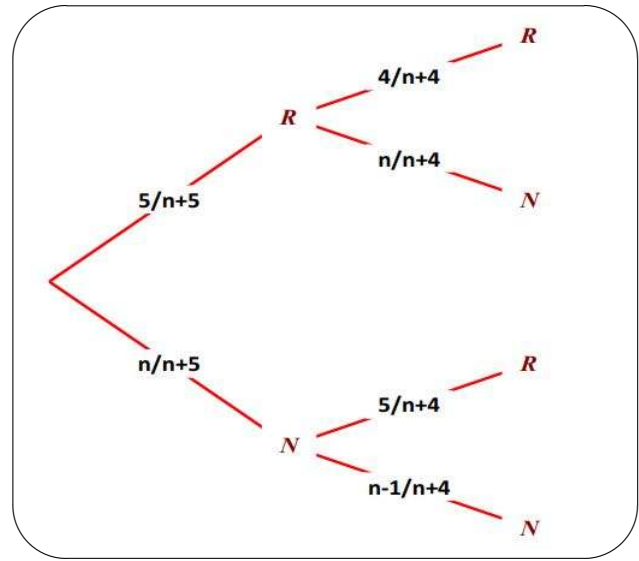
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

قانون احتمال المتغير العشوائي X : 1 ن

يمكن أن نستعين بشجرة الاحتمالات التالية:



ومنه قيم المتغير العشوائي هي:

$$X = \{-20; -5; 10\}$$

ومنه قانون احتمال:

X_i	-20	-5	10
$p(X_i)$	$\frac{20}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{n^2 - n}{(n+5)(n+4)}$

* أو يمكن إسعمال المبدأ الأساسي للعد.

سحب كرتين على التوالي بدون إرجاع لدينا ترتيبية ومنه:

$$p(x = -20) = p(\{RR\}) = \frac{A_5^2}{A_{n+5}^2}$$

$$= \frac{20}{(n+5)(n+4)}$$

$$p(x = -5) = p(\{RN\}) = 2 \frac{A_5^1 \times A_n^1}{A_{n+5}^2}$$

$$= \frac{10n}{(n+5)(n+4)}$$

$$p(x = 10) = p(\{NN\}) = \frac{A_n^2}{A_{n+5}^2}$$

$$= \frac{n^2 - n}{(n+5)(n+4)}$$

2

دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$: 0.5 ن• حساب $g'(x)$:الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

• دراسة إشارة $g'(x)$:لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \text{ معناه:}$$

معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستعمل المميز Δ .

$$\Delta = (-6)^2 - 4(3)(3) = 0 \text{ ومنه المعادلة لها حل}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1 \text{ مضاعف هو:}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0 \text{ ومنه:}$$

• اتجاه تغير الدالة g :الدالة g تتعدم ولا تغير إشارتها ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) \geq 0 \text{ ومنه الدالة } g \text{ متزايدة تماما على } \mathbb{R}.$$

جدول تغيرات الدالة g : 0.25 ن

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$

3

تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2.5 < \alpha < 2.7$: 0.25 نلدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$.وبالأخص على المجال $]2.5; 2.7[$.

$$f(2.5) = -0.6 \text{ و } f(2.6) = 0.1 \text{ ولدينا:}$$

$$f(2.5) \times f(2.7) < 0 \text{ أي:}$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2.5; 2.7[$.• استنتاج إشارة $g(x)$ حسب العدد الحقيقي x :

0.25 ن

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1

حساب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$: 0.5 ن

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} = +\infty$$

لأن: لما $x \rightarrow 1$ فإن: $(x-1)^2 \rightarrow 0$

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \rightarrow 2 \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} = +\infty$$

لأن: لما $x \rightarrow 1$ فإن: $(x-1)^2 \rightarrow 0$

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \rightarrow 2 \text{ و}$$

• تفسير النتائج هندسيا: 0.25 ن

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ لدينا:}$$

ومن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقاربعمودي للمنحنى (C_f) .حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: 0.25 ن

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيثمن أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = ax + b + \frac{2}{(x-1)^2} \text{ : 0.5 ن}$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f على $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

3

• تعيين الدالة المشتقة f' للدالة f : 0.25 ن

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ ودالتها المشتقة f' حيث:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-1)^3 - 4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{g(x)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط في المقام.

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	-	0	+
$(x-1)^3$	-	+	-	+
$f'(x)$	+	-	0	+

• إتجاه تغير الدالة f : 0.25 ن

إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجال $]-\infty; 1[$ والمجال $]\alpha; +\infty[$.

ومتناقصة تماما على المجال $]1; \alpha]$.

• جدول تغيرات f : 0.25 ن

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل

4

في نقطة وحيدة ذات الفاصلة β حيث:

0.25 ن $-1 < \beta < 0$

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + 2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + x^2(-2a+b) + x(a-2b) + b+2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -3 \\ a - 2b = 3 \\ b + 2 = 1 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2} \text{ ومنه:}$$

تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما

ب

مقاربا مائلا (Δ) مع تعيين معادلة له:

0.25 ن

$$\text{نضع } y = x - 1 \text{ نجد: } f(x) = y + \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \text{ ولدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \text{ و}$$

ومن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$.

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة

ج

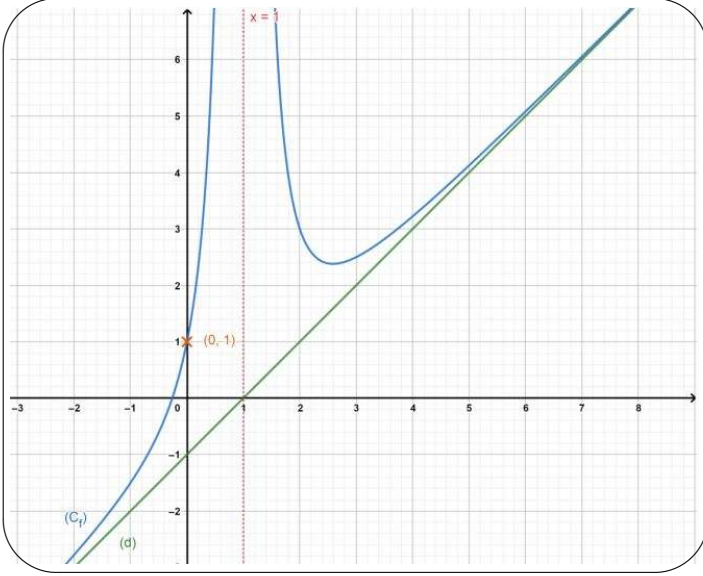
إلى المستقيم (Δ) : 0.25 ن

دراسة إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2}{(x-1)^2} > 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	+	+
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

- ◁ نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (yy') .
- ◁ ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f) .



تعيين بيانيا مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل

المعادلة: $f(x) = x + m$ حلين مختلفين: 0.25 ن

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ بيانيا هي نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المتحرك (d_m) ذو المعادلة $y = x + m$

ومنه المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (d_m) مرتين

من أجل: $m > -1$

إذن قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة:

$f(x) = x + m$ حلين مختلفين هي: $m \in]-1; +\infty[$

(III)

تبيين أن h دالة زوجية: 0.25 ن

لدينا: $x \in D_h$

معناه: $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

معناه: $x < -1$ أو $-1 < x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $-x > 1$ أو $-x > -1$ أو $1 > -x$

معناه: $(-x) \in]-1; 1[$ أو $(-x) \in]1; +\infty[$

أو $(-x) \in]-\infty; -1[$

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
وبالأخص على المجال $] -1; 0]$.

ولدينا: $f(-1) = -1.5$ و $f(0) = 1$

أي: $f(-1) \times f(0) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $-1 < \beta < 0$.

5 تبين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$: 0.25 ن

يكفي أن نثبت أن: $f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} = 0$

لدينا سابقا: $g(\alpha) = 0$ إذن:

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} &= \alpha - 1 + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-1)^2 + 2 - 6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{0}{(\alpha-1)^2} = 0 \end{aligned}$$

• استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$: 0.25 ن

لدينا: $2.5 < \alpha < 2.7$

معناه: $1.5 < \alpha - 1 < 1.7$

معناه: $2.25 < (\alpha-1)^2 < 2.89$

معناه: $\frac{1}{2.89} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{2.25}$

معناه: $\frac{6}{2.89} < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{2.25}$

معناه: $2.07 < f(\alpha) < 2.66$

6 حساب $f(0)$: 0.25 ن

لدينا: $f(0) = 0 - 1 + \frac{2}{(0-1)^2} = 1$

• رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) : 0.5 ن

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

◁ نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$

◁ نرسم المستقيم المقارب المائل Δ

ذو المعادلة $y = x - 1$

معناه: $(-x) \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

ومنه: $(-x) \in D_h$

ولدينا: $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$

ومنه الدالة h زوجية.

2 شرح كيفية إنشاء (C_h) : 0.25 ن

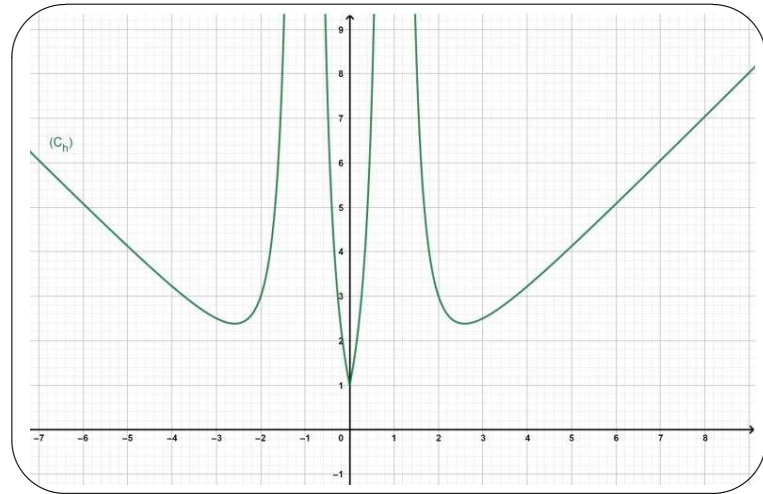
ولدينا: $h(x) = f(|x|)$

ومنه من أجل $x \geq 0$ ، يكون (C_h) منطبقا على (C_f) .

ومن أجل $x \leq 0$ ، يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة

إلى محور الترتيب (yy')

• إنشاء (C_h) : 0.5 ن



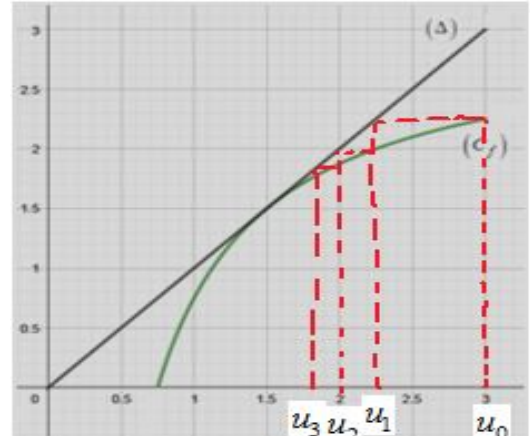
إنتهى تصحيح الموضوع الأول



تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الاول: (4 نقاط)

1-أ) تمثيل الحدود على حامل محور الفواصل: (0.5)



ب) من تمثيل الحدود يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة (0.25)

2) البرهان بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n > \frac{3}{2}$

من أجل $n=0: u_0 = 3 > \frac{3}{2}$ محققة .

(0.5)

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي $u_n > \frac{3}{2}$)
صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي $u_{n+1} > \frac{3}{2}$)

لدينا: $u_n > \frac{3}{2}$ تكافئ: $4u_n > 6$ تكافئ: $\frac{1}{4u_n} < \frac{1}{6}$

تكافئ: $\frac{-9}{4u_n} > \frac{-9}{6}$ تكافئ: $\frac{-9}{4u_n} > \frac{-3}{2}$

تكافئ: $u_{n+1} > \frac{3}{2}$ تكافئ: $3 - \frac{9}{4u_n} > 3 - \frac{3}{2}$

بما أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ فهي صحيحة من أجل n وذلك حسب البرهان بالتراجع .

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : (0.5)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 - \frac{9}{4u_n} - u_n \\ &= \frac{12u_n - 9 - u_n(4u_n)}{4u_n} \\ &= \frac{-4u_n^2 + 12u_n - 9}{4u_n} \end{aligned}$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times (-4) \times (-9) = 0 : \Delta \text{ حساب المميز}$$

$$x_0 = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2} \text{ ومنه :}$$

بما أن: $u_n > \frac{3}{2}$ فإن $-4u_n^2 + 12u_n - 9 < 0$ و

$4u_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

استنتاج تقارب المتتالية: (0.25)

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{3}{2}$ فهي متقاربة .

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي l

$$(0.25) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ حيث :}$$

$$\text{لنا : } 3 - \frac{9}{4l} = l \text{ ومنه : } 12l - 9 = 4l^2 \text{ حيث } l \neq 0$$

$$\text{تكافئ : } 4l^2 - 12l + 9 = 0$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times (4) \times (9) = 0 : \Delta \text{ حساب المميز}$$

$$\text{ومنه : } x_0 = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ومنه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2}$$

4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$$

أ) البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{2}{3}$: (0.5)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{2u_{n+1} - 3} - \frac{2}{2u_n - 3} = \frac{2}{2\left(3 - \frac{9}{4u_n}\right) - 3} - \frac{2}{2u_n - 3}$$

$$= \frac{2}{6 - \frac{18}{4u_n} - 3} - \frac{2}{2u_n - 3} = \frac{2}{3 - \frac{9}{2u_n}} - \frac{2}{2u_n - 3}$$

$$= \frac{2}{\frac{6u_n - 9}{2u_n}} - \frac{2}{2u_n - 3} = \frac{4u_n}{6u_n - 9} - \frac{2 \times 3}{(2u_n - 3) \times 3}$$

$$= \frac{4u_n}{6u_n - 9} - \frac{6}{6u_n - 9} = \frac{4u_n - 6}{6u_n - 9} = \frac{2(2u_n - 3)}{3(2u_n - 3)} = \frac{2}{3}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{2}{3}$

ب) كتابة v_n بدلالة n : (0.25)

$$\text{حساب الحد الاول : } v_0 = \frac{2}{2u_0 - 3} = \frac{2}{2 \times 3 - 3} = \frac{2}{3}$$

لدينا : $v_n = v_0 + nr$
 $v_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}n$
 ومنه : $= \frac{2+2n}{3}$

استنتاج (u_n) بدلالة n : (0.5)

لنا : $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$ تكافئ : $\frac{1}{v_n} = \frac{2u_n - 3}{2}$
 تكافئ : $\frac{2}{v_n} = 2u_n - 3$ تكافئ : $2u_n = \frac{2}{v_n} + 3$
 تكافئ : $u_n = \frac{1}{v_n} + \frac{3}{2}$ تكافئ : $u_n = \frac{3}{2+2n} + \frac{3}{2}$
 تكافئ : $u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1+n} + 1 \right)$ تكافئ : $u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$ تكافئ : $u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1+1+n}{1+n} \right)$

(3) حساب المجموع : (0.5)

لنا : $u_n v_n = \frac{3}{2} \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \times \frac{2+2n}{3}$
 $= \frac{3}{2} \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \times \frac{2(n+1)}{3}$
 $= n+2$
 ومنه :

$S_n = u_n v_n + u_{n+1} v_{n+1} + u_{n+2} v_{n+2} + \dots + u_{n+2021} v_{n+2021}$
 $= \frac{n+2021-n+1}{2} (n+2 + (n+2021)+2)$
 $= \frac{2022}{2} (2n+2025)$
 $= 2022n + 2047275$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

(1) أ- تعيين الثنائية $(x_0; y_0)$: (0.5)

لدينا : $\ln(x_0 - y_0) = 0$ تكافئ : $x_0 - y_0 = e^0$
 (حيث : $x_0 - y_0 > 0$) تكافئ : $x_0 - y_0 = 1$
 ومنه : $x_0 = 1 + y_0$

بالتعويض في المعادلة (E) نجد :
 $3(y_0 + 1) - 5y_0 = 1 - 2y_0 + 3 = 1$ ومنه : $y_0 = 1$

$y_0 = \frac{1-3}{-2} = 1$ ومنه : $x_0 = 2$

ب- استنتاج حلول المعادلة (E) : (0.5)

تعيين حلول المعادلة (E') :

تكافئ : $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 3(2) - 5(1) = 1 \end{cases}$

تكافئ : $3(x-2) = 5(y-1)$

لنا 3 يقسم $5(y-1)$ ولكن 3 أولي مع 5 أي حسب مبرهنة
 غوص 3 يقسم $y-1$ ومنه $y-1 = 3k$ مع $k \in \mathbb{Z}$
 ومنه : $y = 3k+1$ مع $k \in \mathbb{Z}$

و بالتعويض نجد : $3x - 5(3k+1) = 1$

ومنه : $x = 5k+2$ مع $k \in \mathbb{Z}$

أي حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$ هي من الشكل :

$(5k+2; 3k+1)$ مع $k \in \mathbb{Z}$

(2) a و b عدنان صحيحان و λ العدد الذي يحقق :

$\begin{cases} \lambda = 3b+2 \\ \lambda = 5a+3 \end{cases}$

أ- بيان أن $(b; a)$ حل للمعادلة (E) : (0.5)

لنا : $\begin{cases} \lambda = 3b+2 \\ \lambda = 5a+3 \end{cases}$ ومنه : $3b+2 = 5a+3$

أي : $3b-5a = 3-2$ ومنه : $3b-5a = 1$

معناه $(b; a)$ حل للمعادلة (E)

ب- تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد λ على 15 : (0.5)

لنا : $\begin{cases} \lambda = 3b+2 \\ \lambda = 5a+3 \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} \lambda \equiv 2[3] \\ \lambda \equiv 3[5] \end{cases}$

تكافئ : $\begin{cases} 5\lambda \equiv 10[15] \\ 3\lambda \equiv 9[15] \end{cases}$ تكافئ : $2\lambda \equiv 1[15]$

تكافئ : $2\lambda \equiv 16[15]$ (2 أولي مع 15)

ومنه : $\lambda \equiv 8[15]$ أي باقي قسمة λ على 15 هو 8.

(3) n عدد طبيعي يحقق : $\begin{cases} n \equiv -1[3] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$

- تعيين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2021$:

لنا : $\begin{cases} n \equiv -1[3] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$ ومنه : $n = \lambda$ (0.5)

أي : $n = 15q + 8$ حيث $q \in \mathbb{Z}$

لنا : $n < 2021$ أي $15q + 8 < 2021$

اذن : $q < \frac{2021-8}{15}$ أي : $q < 134.2$

ومنه بأخذ : $q = 134$ نجد $n = 2018$

(4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 3 \alpha 0 3}$ في نظام تعداد أساسه 6 .

أ - تعين α و β حيث الثنائية $(\alpha; \beta)$ حل (1) للمعادلة (E):

لنا $(\alpha; \beta)$ حل للمعادلة (E) معناه :

$$\text{مع } k \in \mathbb{Z} \begin{cases} \alpha = x = 5k + 2 \\ \beta = y = 3k + 1 \end{cases}$$

ومن جهة أخرى : $0 \leq \alpha \leq 5$ و $0 < \beta \leq 5$

لدينا : $0 < \beta \leq 5$ ومنه : $0 < 3k + 1 \leq 5$

$$\text{ومنه : } \frac{0-1}{3} < k \leq \frac{5-1}{3} \text{ أي : } -\frac{1}{3} < k \leq \frac{4}{3}$$

ومنه : $k = 0$ أو $k = 1$

- إذا كان $k = 0$ فإن $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ مقبولة .

- إذا كان $k = 1$ فإن $\alpha = 7$ و $\beta = 4$ مرفوضة

لان $0 \leq \alpha \leq 5$ ومنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha; \beta)$

حل للمعادلة (E) هي : $(2; 1)$

- كتابة N في النظام العشري : (0.5)

$$N = \overline{\beta 3 \alpha 0 3}$$

$$\text{لنا : } = 3 + 0 \times 6^1 + \alpha \times 6^2 + 3 \times 6^3 + \beta \times 6^4$$

$$= 651 + 36\alpha + 1296\beta$$

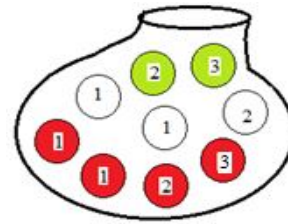
بالتعويض نجد : $N = 2019$

التمرين الثالث : (5 نقاط)

I - كيس يحوي تسع كريات (لا نفرق بينها باللمس) ،

ثلاثة بيضاء مرقمة 1 ، 1 و 2 وأربعة حمراء مرقمة 1 ، 1 ، 2 ،

و 3 واثنان خضراء مرقمة 2 و 3 .



نسحب عشوائيا على التوالي بدون ارجاع 3 كريات من هذا الكيس (ترتيبة).

(1) حساب عدد السحبات الممكنة : $A_9^3 = 504$ (0.25)

(2) حساب احتمال الحوادث التالية :

- الحدث A : " سحب كرية من كل لون " (0.5)

معناه : " 3 كريات مختلفة في اللون "

أي :

$$\text{ومنه : } P(A) = \frac{A_4^1 \times A_3^1 \times A_2^1 \times 6}{A_9^3} = \frac{2}{7}$$

- الحدث B : " سحب كريات من نفس اللون " (0.5)

أي :

بالنسبة للخضراء فعددها غير كاف .

$$P(B) = \frac{A_4^3 + A_3^3}{A_9^3} = \frac{5}{84}$$

- الحدث C : " سحب كريات تحمل نفس الرقم " (0.5)

هنا نهتم فقط بالأرقام لا بالألوان .

أي :

بالنسبة للعدد 3 فعدد الكرات التي تحمل الرقم 3

غير كافية .

$$\text{ومنه : } P(C) = \frac{A_4^3 + A_3^3}{A_9^3} = \frac{5}{84}$$

- الحدث D : " سحب كريات تحمل نفس الرقم و

مختلفة في اللون " (هنا نهتم باللون والرقم معا) . (0.5)

ومنه نجد هذه السحبة فقط :

$$P(D) = \frac{A_1^1 \times A_1^1 \times A_1^1 \times 6}{A_9^3} = \frac{1}{84}$$

II - نسحب من الكيس السابق كرتين في آن واحد

ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع

الرقمين اللذان تحملانها الكرتين المسحوبتين .

1- عين قيم المتغير العشوائي X : $X \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$

2- حدد قانون احتمال X : (1) (0.25)

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_9^2} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 4) = \frac{C_3^2 + C_4^1 \times C_2^1}{C_9^2} = \frac{11}{36}$$

$$P(X = 5) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_9^2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 6) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}$$

$X = x_i$	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

جدول تغيرات الدالة g : (0.25)

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

(3) إشارة $g(x)$: (0.25)

لدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g(x) \geq g(1)$
ومنه $g(x) \geq 3$ أي : $g(x) > 0$.

II-f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ ب :

(1) النهايات : (0.5) $f(x) = -x + e - 2 \frac{\ln(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -0 + e - 2 \frac{\ln(0^+)}{0^+} = e - 2(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty - 2 \times 0 = -\infty$$

* المنحنى (Cf) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$

(2) من أجل أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$

فان : (0.5)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + 0 - 2 \times \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} \\ &= -1 - 2 \times \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{-x^2 - 2 + 2 \ln x}{x^2} \\ &= \frac{-g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

(3) إشارة $f'(x)$: عكس إشارة $g(x)$ أي من أجل

كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) < 0$

جدول تغيرات الدالة f : (0.5)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

(4) (أ) بيان أن (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) : (0.5)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + e - 2 \frac{\ln x}{x} - (-x + e) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2 \frac{\ln x}{x} \right] = -2 \times 0 = 0$$

3- حساب كل من الامل الرياضي والتباين

والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X :

الامل الرياضي : (0.5)

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{11}{36} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{32}{9} \end{aligned}$$

التباين : (0.5)

$$\begin{aligned} V(X) &= 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{11}{36} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{36} - [E^2(X)] \\ &= \frac{247}{18} - \left(\frac{32}{9} \right)^2 \\ &= \frac{175}{162} \end{aligned}$$

الانحراف المعياري : (0.5)

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ &= \sqrt{\frac{175}{162}} \approx 1.04 \end{aligned}$$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

(1-I) النهايات : (0.5)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 + 2 - (-\infty) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \times (+\infty) = +\infty \end{cases}$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g : (0.5)

المشتقة : من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

إشارة المشتقة واتجاه تغيرها :

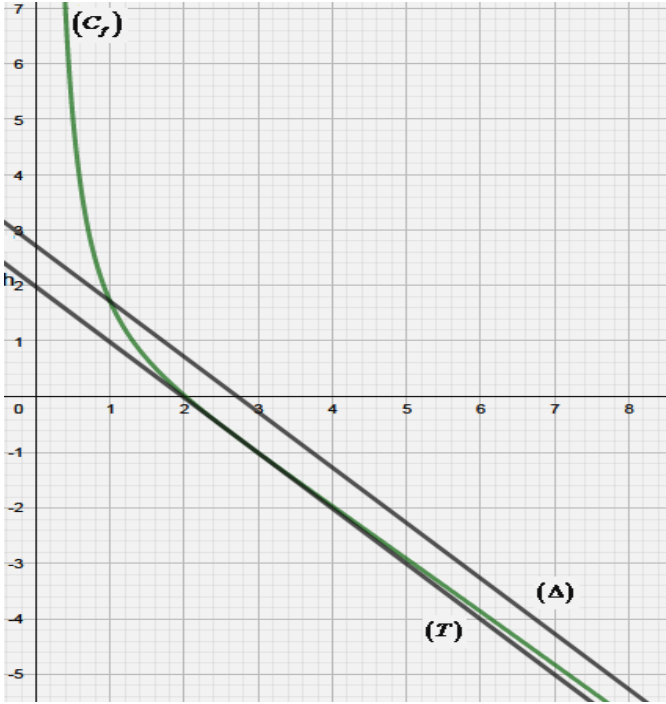
إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2 - 2$ (لان $x > 0$).

$$\begin{cases} x = 1 \in]0; +\infty[\\ 2x^2 - 2 = 0 \text{ تكافئ : } x^2 = 1 \text{ تكافئ : } x = -1 \notin]0; +\infty[\end{cases}$$

ومنه :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
اتجاه تغير g		متناقصة تماما	متزايدة تماما

(7) الانشاء : (1)



(8) المناقشة البيانية : (0.5)

لدينا : $x(e-m) = \ln(x^2)$ تكافئ :

$$e-m = \frac{2\ln(x)}{x} \quad \text{تكافئ : } x(e-m) = 2\ln(x)$$

$$m-e = -\frac{2\ln(x)}{x} \quad \text{تكافئ :}$$

$$m = e - \frac{2\ln(x)}{x} \quad \text{تكافئ :}$$

$$-x+m = -x+e - \frac{2\ln(x)}{x} \quad \text{تكافئ :}$$

ومنه : $f(x) = -x+m$ (مناقشة مائلة) .

- اذا كان $m \in \left[-\infty; \frac{e^2-2}{e}\right]$: لا توجد حلول .

- اذا كان $m = \frac{e^2-2}{e}$: يوجد حل هو $x=e$.

- اذا كان $m \in \left[\frac{e^2-2}{e}; e\right]$: يوجد حلان .

- اذا كان $m=e$: يوجد حل هو $x=1$.

- اذا كان $m \in [e; +\infty]$: يوجد حل واحد .

إنتهى تصحيح الموضوع الثاني



(0.5) ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) :

$$\text{ندرس اشارة الفرق : } f(x) - y = \frac{-2\ln x}{x}$$

اشارة الفرق من اشارة لان $-2\ln x$ لان $x > 0$

لدينا : $-2\ln x = 0$ تكافئ : $\ln x = 0$ تكافئ : $x=1$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي	فوق	متقاطعان في $(1, -1+e)$	تحت

(5) بيان انه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم المقارب المائل (Δ) :

$$\frac{-x^2-2+2\ln x}{x^2} = -1 \quad \text{تكافئ : } f'(x) = -1$$

$$\text{تكافئ : } -x^2-2+2\ln x = -x^2 \quad \text{تكافئ :}$$

$$-2+2\ln x = 0 \quad \text{تكافئ : } \ln x = 1 \quad \text{تكافئ : } x=e$$

ومنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم

المقارب المائل (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=e$.

- تعيين معادلة للمماس (T) :

$$(T): y = f'(e)(x-e) + f(e)$$

$$= -1(x-e) - \frac{2}{e}$$

$$= -x + e - \frac{2}{e}$$

$$= -x + \frac{e^2-2}{e}$$

(6) لدينا f دالة مستمرة ومتناقصة تماما على المجال

$$[2; 2.1] \text{ ولدينا } f(2) \approx 0.02, f(2.1) \approx -0.08$$

$$\text{أي : } f(2) \times f(2.1) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع

حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث :

$$2 < \alpha < 2.1$$

(0.5) اشارة $f(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	+	-	