

### التمرين الأول

- يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللمس .
- 1 - نسحب من الكيس 3 كرات عشوائيا وفي آن واحد .  
♣ احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :  
A - " الكرات المسحوبة كلّها حمراء " .  
B - " توجد كرة واحدة حمراء في السحب " .  
C - " توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب " .  
D - " الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة " .
  - 2 - ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها  $n$  كرة سوداء حيث  $n \in \mathbb{N}$  مع  $n \geq 2$  ثمّ نسحب كرتين على التوالي وبدون إرجاع .  
♣ نفرض أنّ سحب كرة حمراء يساوي ( -10 ) نقطة ، وسحب كرة سوداء يساوي ( +5 ) نقطة .  
نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق كل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها .  
أ - عيّّن قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي  $X$  والأمل الرياضي  $E(X)$  .  
ب - عيّّن قيمة  $n$  حتى تكون اللعبة عادلة .  
ج - كيف نختار عدد الكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟

### التمرين الثاني

- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  كيلي :  $f(x) = \frac{3x}{x+1}$
- ونسَمّي  $(C_f)$  منحنيا البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ( الوثيقة المرفقة ) .
- (I)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كيلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

- 1 - على الوثيقة المرفقة مثّل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية  $(u_n)$  ( دون حسابها وموضّحاً خطوط الإنشاء ) .
- 2 - ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها .
- 2 - برهن بالتراجع أنّه من كل عدد طبيعي  $n : u_n < 2$  .
- 3 - أثبت أنّ المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ثمّ استنتج أنّها متقاربة . عيّّن نهايتها .

(II) نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

- 1 - برهن أنّ المتتالية  $(v_n)$  هندسية يَطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .
- 2 - اكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثمّ استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  . تحقق من نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

(III) اكتب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :

$$S_n = \frac{u_0}{u_0 - 2} + \frac{u_1}{u_1 - 2} + \frac{u_2}{u_2 - 2} + \dots + \frac{u_n}{u_n - 2}$$

## التمرين الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$  .

(II) المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  .

نعتبر النقط  $A, B, C, D$  ذات اللواحق  $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$  ،  $z_B = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$  ،  $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$  ،  $z_D = \overline{z_C}$  على الترتيب

1 - أ - بين أن النقط  $A, B, C, D$  تنتمي إلى نفس الدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega$  ذات اللاحق  $z_\Omega = 3$  .

ب - بين أن :  $z_A = \left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{1963}$  .

2 - لتكن النقطة  $E$  نظيرة النقطة  $D$  بالنسبة إلى المبدأ  $O$  .

أ - عين عمدة وطويلة العدد المركب  $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $BEC$  .

ب - استنتج طبيعة التحويل  $T$  الذي مركزه النقطة  $B$  ويحول  $E$  إلى  $C$  ثم اكتب الصيغة المركبة له .

(III) 1 - عين طبيعة  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحق  $z$  التي تحقق :  $|iz - 3i| = |-3 + i\sqrt{3}|$  .

2 - عين طبيعة  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحق غير المعدومة  $z$  التي تحقق :  $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$  حيث :  $k \in \mathbb{Z}$  .

## التمرين الرابع

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كإيلي :  $g(x) = 1 + x^2 + \ln x$  .

1 - ادرس تغيرات الدالة  $g$  .

2 - بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث :  $0.32 < \alpha < 0.33$  .

3 - استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كإيلي :  $f(x) = -x + \frac{2 + \ln x}{x}$  .

ونسَمي  $(C_f)$  منحنيا البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

1 - احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  .

2 - بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$  ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

3 - بين أن :  $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$  ثم عين حصراً للعدد  $f(\alpha)$  .

4 - احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$  واستنتج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلته .

- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

5 - أثبت أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماس  $(T)$  يوازي المستقيم  $(\Delta)$  في نقطة يُطلب تعيينها . اكتب معادلة المماس  $(T)$  .

6 - أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  ، المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$  علماً أن  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما  $x_0$  و  $x_1$  حيث :  $0.1 < x_0 < 0.2$  و  $1.5 < x_1 < 1.6$  .

\_\_\_\_\_ بالتوفيق والنجاح إن شاء الله في شهادة البكالوريا \_\_\_\_\_

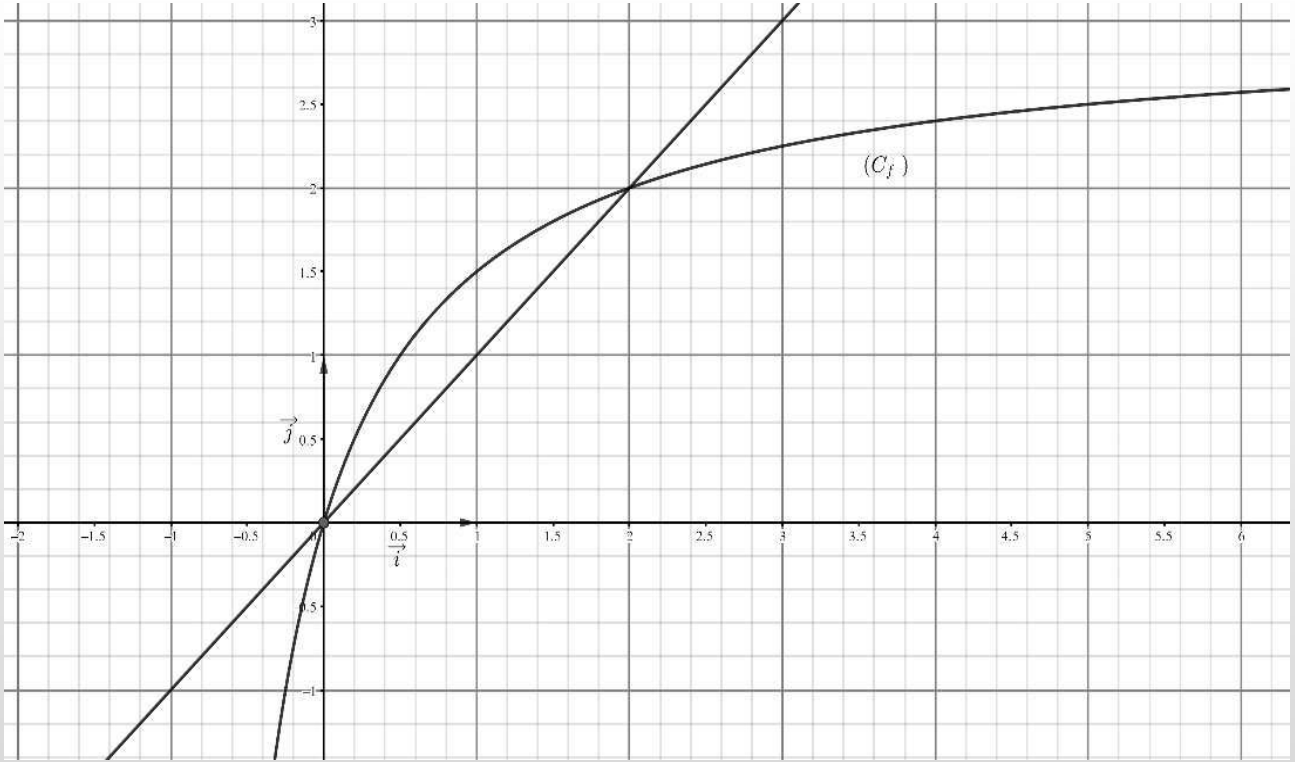
أعظم هندسة في العالم :

بناء جسرٍ من الأمل ... على نهر من الأس !!

الإسم واللقب : .....

الوثيقة المرفقة

القسم : .....

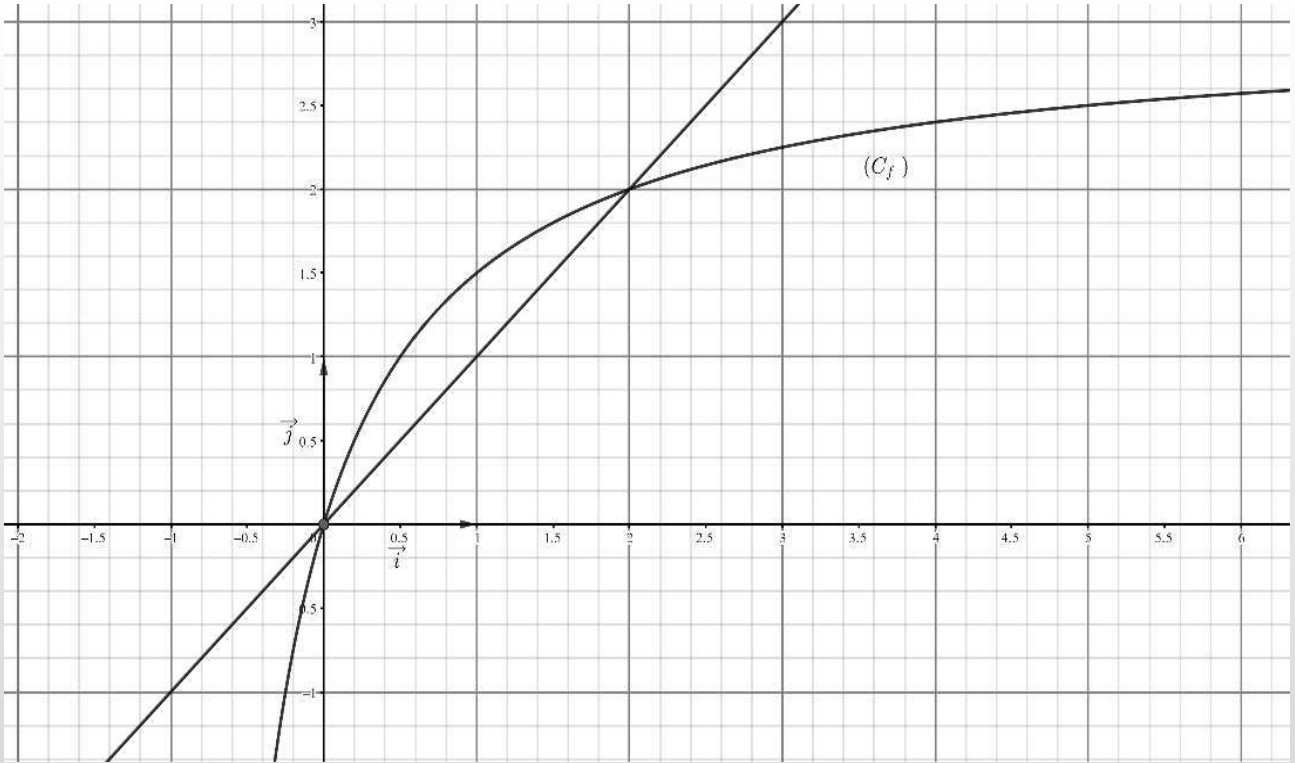


يُنجز العمل المطلوب على الوثيقة المرفقة وتُعاد مع ورقة الإجابة

الإسم واللقب : .....

الوثيقة المرفقة

القسم : .....



يُنجز العمل المطلوب على الوثيقة المرفقة وتُعاد مع ورقة الإجابة

### التمرين الأول

1 - ♣ حساب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

$$P(C) = \frac{C_3^1 \cdot C_5^2 + C_3^2 \cdot C_5^1 + C_3^3}{C_8^3} = \frac{46}{56}, P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}, P(A) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56}$$

$$, P(D) = \frac{C_3^1 \cdot C_5^2 + C_3^2 \cdot C_5^1}{C_8^3} = \frac{45}{56} و$$

2 - أ - تعيين قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي  $X$  والأمل الرياضي  $E(X)$  :

لنعيّن قيم المتغير العشوائي والتي تحقّق :  $x_i \in \{-20; -5; 10\}$  مع  $i \in \{1; 2; 3\}$  .  
لدينا :

$$A_{n+5}^2 = \frac{(n+5)!}{(n+5-2)!} = \frac{(n+5)!}{(n+3)!} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{(n+3)!} = (n+5)(n+4) = n^2 + 9n + 20$$

وعليه :

$$P(X = -5) = \frac{2A_5^1 \cdot A_n^1}{A_{n+5}^2} = \frac{10n}{n^2 + 9n + 20}, P(X = -20) = \frac{A_5^2}{A_{n+5}^2} = \frac{20}{n^2 + 9n + 20}$$

$$P(X = 10) = \frac{A_n^2}{A_{n+5}^2} = \frac{n(n-1)}{n^2 + 9n + 20} و$$

لنلخص ذلك في الجدول التالي :

|              |                            |                             |                                 |
|--------------|----------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| $x_i$        | -20                        | -5                          | 10                              |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{20}{n^2 + 9n + 20}$ | $\frac{10n}{n^2 + 9n + 20}$ | $\frac{n^2 - n}{n^2 + 9n + 20}$ |

تعيين الأمل الرياضي  $E(X)$  :

$$E(X) = -20 \left( \frac{20}{n^2 + 9n + 20} \right) - 5 \left( \frac{10n}{n^2 + 9n + 20} \right) + 10 \left( \frac{n^2 - n}{n^2 + 9n + 20} \right) = \frac{10n^2 - 60n - 400}{n^2 + 9n + 20}$$

ب - تعيين قيمة  $n$  حتى تكون اللعبة عادلة : حتى تكون اللعبة عادلة يكون  $E(X) = 0$

$$E(X) = 0 \text{ معناه } \frac{10n^2 - 60n - 400}{n^2 + 9n + 20} = 0 \text{ أي } 10n^2 - 60n - 400 = 0 \text{ معناه } n = 10$$

ج - تبين كيف نختار عدد الكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟ : لدينا :  $E(X) = \frac{10(n+4)(n-10)}{n^2 + 9n + 20}$

$$\cdot \frac{10(n+4)}{n^2 + 9n + 20} > 0 \text{ لأن } n > 10 \text{ أي } (n-10) > 0 \text{ أي } E(X) > 0$$

ومنه حتى تكون اللعبة مربحة نأخذ الكرات السوداء أكبر تماما من 10 كرات .

### التمرين الثاني

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 1} = \frac{3u_n + 3 - 3}{u_n + 1} = \frac{3u_n + 3}{u_n + 1} - \frac{3}{u_n + 1} = 3 \left( \frac{u_n + 1}{u_n + 1} \right) - \frac{3}{u_n + 1} = 3 - \frac{3}{u_n + 1}$$

لدينا :

(I) 1 - التمثيل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية  $(u_n)$  ( الوثيقة المرفقة ) .

2 - وضع التخمين حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها :

من خلال البيان نلاحظ أنّ حدود المتتالية  $(u_n)$  تتزايد وبالتالي نُخمن أنّها متزايدة كلما نلاحظ أنّها تتقارب نحو نقطة تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المنصف الأول وعليه نُخمن أنّها متقاربة نحو النقطة ذات الفاصلة 2 .

3 - البرهان بالتراجع أنّه من كل عدد طبيعي  $n : u_n < 2$  :

- من أجل  $n = 0$  لدينا  $u_0 = 1$  ونعلم أنّ  $1 < 2$  ومنه  $u_0 < 2$  وبالتالي الخاصية " $u_n < 2$ " محققة من أجل  $n = 0$  .

- نفرض أنّ  $u_n < 2$  ونبرهن أنّ  $u_{n+1} < 2$  .

لدينا من الفرض  $u_n < 2$  بإضافة العدد 1 نجد :  $u_n + 1 < 3$  بوضع مقلوب الطرفين نجد :  $\frac{1}{u_n + 1} > \frac{1}{3}$  بضرب الطرفين في

العدد -3 نجد :  $-\frac{3}{u_n + 1} < -1$  بإضافة العدد 3 نحصل على :  $u_{n+1} < 2$  .

ومنه من أجل كل  $n$  عدد طبيعي فإنّ :  $u_n < 2$  .

ملاحظة مهمّة : هنا يمكنك استعمال الدالة المرفقة للانتقال من  $u_n$  إلى  $u_{n+1}$  وهو الأفضل .

3 - اثبات أنّ المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ثم استنتاج أنّها متقاربة . تعيين نهايتها :

لدينا :  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$  . نلاحظ من خلال البيان أنّه من كل  $x$  من المجال  $[0; 2]$  المنحنى  $(C_f)$  يقع فوق المستقيم ذو المعادلة  $y = x$

ومنه من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; 2]$  فإنّ :  $f(x) - x > 0$  .

بما أنّ  $0 \leq u_n < 2$  ( واضح أنّ  $0 \leq u_n$  ) فإنّ :  $f(u_n) - u_n \geq 0$  وعليه  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .

بما أنّ المتتالية  $(u_n)$  ومتزايدة و  $u_n < 2$  أي محدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنّ المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو 2 .  
تعيين النهاية :

بما أنّ المتتالية  $(u_n)$  متقاربة فإنّ :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$  مع  $l$  عدد حقيقي .

لايجاد  $l$  نضع  $l = f(l)$  معناه  $l = \frac{3l}{l+1}$  أي  $l^2 + l = 3l$  إذن  $l^2 - 2l = 0$  وعليه  $l(l - 2) = 0$  هذا معناه :  $l = 2$  أو

$l = 0$  وبما أنّ  $u_0 = 1$  والمتتالية  $(u_n)$  متزايدة فإنّ :  $l = 2$  ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$  .

(II) 1 - البرهان أنّ المتتالية  $(v_n)$  هندسية مع تعيين أساسها وحدّها الأول :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{3u_n}{u_n + 1}} = 1 - \frac{2(u_n + 1)}{3u_n} = \frac{3u_n - 2u_n - 2}{3u_n} = \frac{u_n - 2}{3u_n} = \frac{1}{3} \left( \frac{u_n - 2}{u_n} \right) = \frac{1}{3} v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{3}$  وحدّها الأول  $v_0 = 1 - \frac{2}{u_0} = 1 - \frac{2}{1} = -1$

2 - كتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتاج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا :  $v_n = v_0 q^n$  ومنه  $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$  وكذلك  $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$  ومنه  $u_n = \frac{2}{1 - v_n}$  ومنه  $u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$  .  
التحقق من نهاية المتتالية  $(u_n)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 2 \quad \text{لأنّ} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \left(-1 < \frac{1}{3} < 1\right)$$

(III) كتابة بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  :

$$\text{لدينا : } \frac{u_n}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{u_n - 2}{u_n}} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_n} - \frac{2}{u_n}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{u_n}} = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{-\frac{1}{(3)^n}} = -(3)^n$$

$$S_n = -(3)^0 - (3)^1 - (3)^2 - \dots - (3)^n = -(3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n) = -\left(\frac{1 - (3)^{n+1}}{1 - 3}\right) = \frac{1 - (3)^{n+1}}{2}$$

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$  :

لدينا  $(z^2 - 6z + 21) = 0$  أو  $(z^2 + 3) = 0$  معناه :  $(z^2 - 6z + 21) = 0$  أو  $(z^2 + 3) = 0$

نبدأ بالمعادلة الأولى  $(z^2 + 3) = 0$  معناه  $z^2 = -3$  أي  $z^2 = 3i^2$  وعليه  $z = i\sqrt{3}$  و  $z = -i\sqrt{3}$  .

الآن نمر إلى المعادلة الثانية  $(z^2 - 6z + 21) = 0$  نحسب المميز  $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(21) = -48 = 48i^2 = (4\sqrt{3}i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{6 - 4i\sqrt{3}}{2} = 3 - 2i\sqrt{3} \\ z_2 = \frac{6 + 4i\sqrt{3}}{2} = 3 + 2i\sqrt{3} \end{cases} \text{ وعليه حلول المعادلة الثانية هي :}$$

إذن حلول المعادلة  $(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$  هي :  $S = \{-i\sqrt{3}; i\sqrt{3}; 3 - 2i\sqrt{3}; 3 + 2i\sqrt{3}\}$  .

(II) 1 - أ - تبين أن النقط  $A, B, C, D$  تنتمي إلى نفس الدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega$  ذات اللاحقة  $3$  :

$$\begin{aligned} |z_\Omega - z_A| &= |3 - \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}| = |3 - \sqrt{3}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ |z_\Omega - z_B| &= |3 - \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}| = |3 - \sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ |z_\Omega - z_C| &= |3 - (3 + 2i\sqrt{3})| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \\ |z_\Omega - z_D| &= |3 - (3 - 2i\sqrt{3})| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

واضح أن :  $|z_\Omega - z_A| = |z_\Omega - z_B| = |z_\Omega - z_C| = |z_\Omega - z_D| = 2\sqrt{3}$  أي :  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = 2\sqrt{3}$  .  
ومنه النقط  $A, B, C, D$  تنتمي إلى نفس الدائرة  $(C)$  .

ب - تبين أن :  $\left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{1963} = z_A$  لدينا :

$$\left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{1963} = \left(\frac{2 - 2i\sqrt{3}}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4}\right)^{1963} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1906} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1963}$$

$$\left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{1963} = (e^{-i\frac{\pi}{3}})^{1906} + (e^{i\frac{\pi}{3}})^{1963} = e^{-i\frac{1906\pi}{3}} + e^{i\frac{1963\pi}{3}}$$

$$e^{i\left(\frac{-1906\pi - \pi}{3}\right)} + e^{i\left(\frac{1963\pi + \pi}{3}\right)} = e^{-i635\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i654\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{1963} = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = z_A$$

أ - تعيين عمدة وطويلة العدد المركب  $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$  ثم استنتاج طبيعة المثلث  $BEC$  :

نظرة  $D$  بالنسبة إلى  $O$  معناه :  $z_E = -z_B = -3 + 2i\sqrt{3}$  .

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}} = \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

لدينا :  $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3}$  و  $\left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = \frac{|z_C - z_B|}{|z_E - z_B|} = \frac{BC}{BE} = 1$  .

ب - استنتاج طبيعة التحويل  $T$  الذي مركزه النقطة  $B$  ويحول  $E$  إلى  $C$  ثم كتابة الصيغة المركبة له :

لدينا :  $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$  ومنه  $z_C - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_B)$  إذن  $T$  دوران مركزه النقطة  $B$  وزاويته  $-\frac{\pi}{3}$  .  
والعبارة المركبة لهذا التحويل هي :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot z + z_B(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + z_B\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

1 - تعيين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق :  $|iz - 3i| = |-3 + i\sqrt{3}|$

لدينا :  $|iz - 3i| = |-3 + i\sqrt{3}|$  تكافئ :  $|i(x + iy) - 3i| = \sqrt{(-3)^2 + 3}$  تكافئ :  $|-y + i(x - 3)| = \sqrt{12}$  تكافئ :  $(x - 3)^2 + y^2 = 12$  إذن (E) هي دائرة مركزها النقطة  $\Omega(3; 0)$  ونصف قطرها  $r = 2\sqrt{3}$ .

2 - تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z التي تحقق :  $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$  حيث :  $k \in \mathbb{Z}$  :  
لدينا  $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \arg(z) - \arg(\bar{z})$  ونعلم أنّ :  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$  وعليه  $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2\arg(z)$  وعليه حتى تكون  $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$  يكون  $\arg(z) = k\pi$  يكافئ :  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = k\pi$  إذن (Γ) هي محور الفواصل باستثناء النقطة O.

### التمرين الرابع

(I) 1 - دراسة تغيّرات الدالة g .

النهايات :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2 + \ln x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 + \ln x) = -\infty$

المشتقة : الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  ودالتها المشتقة هي :  $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$

نلاحظ أنّه من أجل كل x من المجال  $]0; +\infty[$  فإنّ :  $g(x) > 0$  ومنه الدالة g متزايدة تماما .

جدول التغيّرات :

|       |           |           |
|-------|-----------|-----------|
| x     | 0         | $+\infty$ |
| g'(x) |           | +         |
| g(x)  | $-\infty$ | $+\infty$ |

2 - تبين أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلّا وحيداً α حيث :  $0.32 < \alpha < 0.33$  :

لدينا  $g(0.32) = -0.037$  و  $g(0.33) = 0.00023$  .  
من جدول التغيّرات لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال  $]0.32; 0.33[$  و  $g(0.32) \times g(0.33) < 0$  إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلّا وحيداً α حيث  $0.32 < \alpha < 0.33$  .

3 - استنتاج حسب قيم x إشارة g(x) على المجال  $]0; +\infty[$  :

|      |   |   |           |
|------|---|---|-----------|
| x    | 0 | α | $+\infty$ |
| g(x) |   | - | +         |

(II) 1 - حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  :

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  لأنّ :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-x + \frac{2 + \ln x}{x}\right) = -\infty$

$\left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \right\}$  لأنّ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{2 + \ln x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$

2 - تبين أنّه من أجل كل x من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$  ثمّ تشكيل جدول تغيّرات الدالة f :

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  ودالتها المشتقة هي :  
$$f'(x) = -1 + \left( \frac{\frac{1}{x} \times x - (2 + \ln x)}{x^2} \right) = -1 + \frac{-\ln x - 1}{x^2} = \frac{-x^2 - \ln x - 1}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيّرات الدالة  $f$  :

| $x$     | 0 | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|---|-------------|-----------|
| $f'(x)$ |   | +           | -         |
| $f(x)$  |   | $f(\alpha)$ |           |

3 - تبين أنّ :  $f(\alpha) = 2 \left( \frac{1}{2\alpha} - \alpha \right)$  ثمّ تعيين حصراً للعدد  $f(\alpha)$  :

لدينا : (1)  $f(\alpha) = -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha}$  ولدينا :  $g(\alpha) = 0$  أي :  $1 + \alpha^2 + \ln \alpha = 0$  ومنه  $\ln \alpha = -(1 + \alpha^2)$  بالتعويض في (1) نجد :

$$f(\alpha) = -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha} = -\alpha + \frac{2 - (1 + \alpha^2)}{\alpha} = -\alpha + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} = -\alpha + \frac{1}{\alpha} - \alpha = \frac{1}{\alpha} - 2\alpha = 2 \left( \frac{1}{2\alpha} - \alpha \right)$$

4 - حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$  واستنتاج أنّ  $(C_f)$  يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -x + \frac{2 + \ln x}{x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

ومنّه المستقيم ذو المعادلة  $y = -x$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $(+\infty)$  .

- دراسة الوضع النسبي بين المنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  : لدينا :  $f(x) - y = f(x) + x = \frac{2 + \ln x}{x}$

إشارة  $f(x) + x$  من إشارة  $2 + \ln x = 0$  لأنّ  $x > 0$  .

لدينا :  $f(x) + x = 0$  معناه  $\frac{2 + \ln x}{x} = 0$  أي  $2 + \ln x = 0$  معناه  $\ln x = -2$  ومنه  $x = e^{-2}$  .

- لـ  $x > e^{-2}$  معناه  $\ln x > -2$  أي  $2 + \ln x > 0$  ومنه  $f(x) - y > 0$  ومنه  $f(x) > y$  ومنه  $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  على المجال  $]e^{-2}; +\infty[$  .

- لـ  $x < e^{-2}$  معناه  $\ln x < -2$  أي  $2 + \ln x < 0$  ومنه  $f(x) - y < 0$  ومنه  $f(x) < y$  ومنه  $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  على المجال  $]0; e^{-2}[$  .

- المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم  $(\Delta)$  في النقطة  $(e^{-2}; -e^{-2})$  ،  $((C_f) \cap (\Delta) = \{(e^{-2}; -e^{-2})\})$  .

5 - اثبات أنّ المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماس  $(T)$  يوازي المستقيم  $(\Delta)$  في نقطة يُطلب تعيينها . كتابة معادلة المماس  $(T)$  :

نعتبر النقطة  $A(x_0; f(x_0))$  .

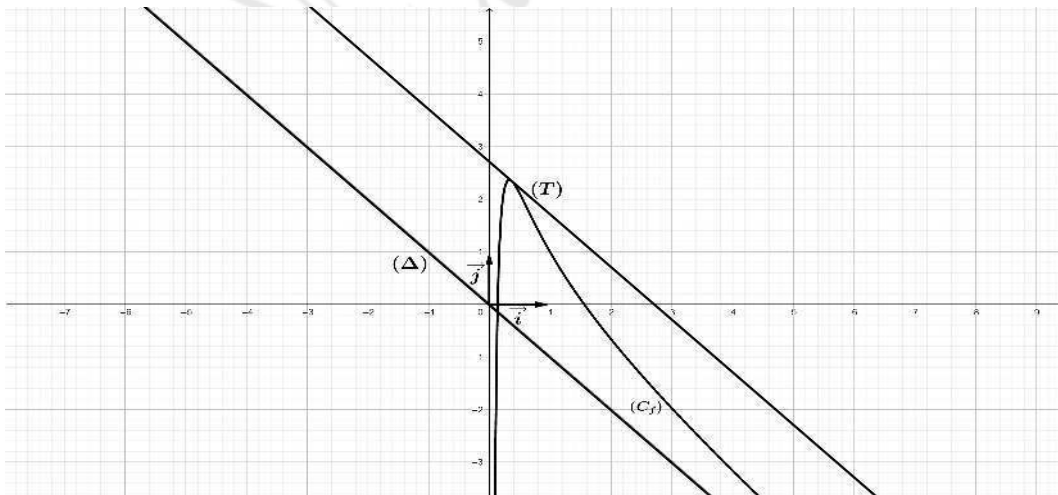
المماس  $(T)$  عند النقطة  $A$  يوازي المستقيم  $(\Delta)$  معناه  $f'(x_0) = -1$  معناه  $-\frac{g(x_0)}{x_0^2} = -1$  أي  $g(x_0) = x_0^2$  أي

$1 + x_0^2 + \ln x_0 = x_0^2$  ومنه  $x_0 = e^{-1}$  وعليه إحداثيات النقطة  $A$  التي يكون عندها المماس  $(T)$  يوازي المستقيم  $(\Delta)$  هي

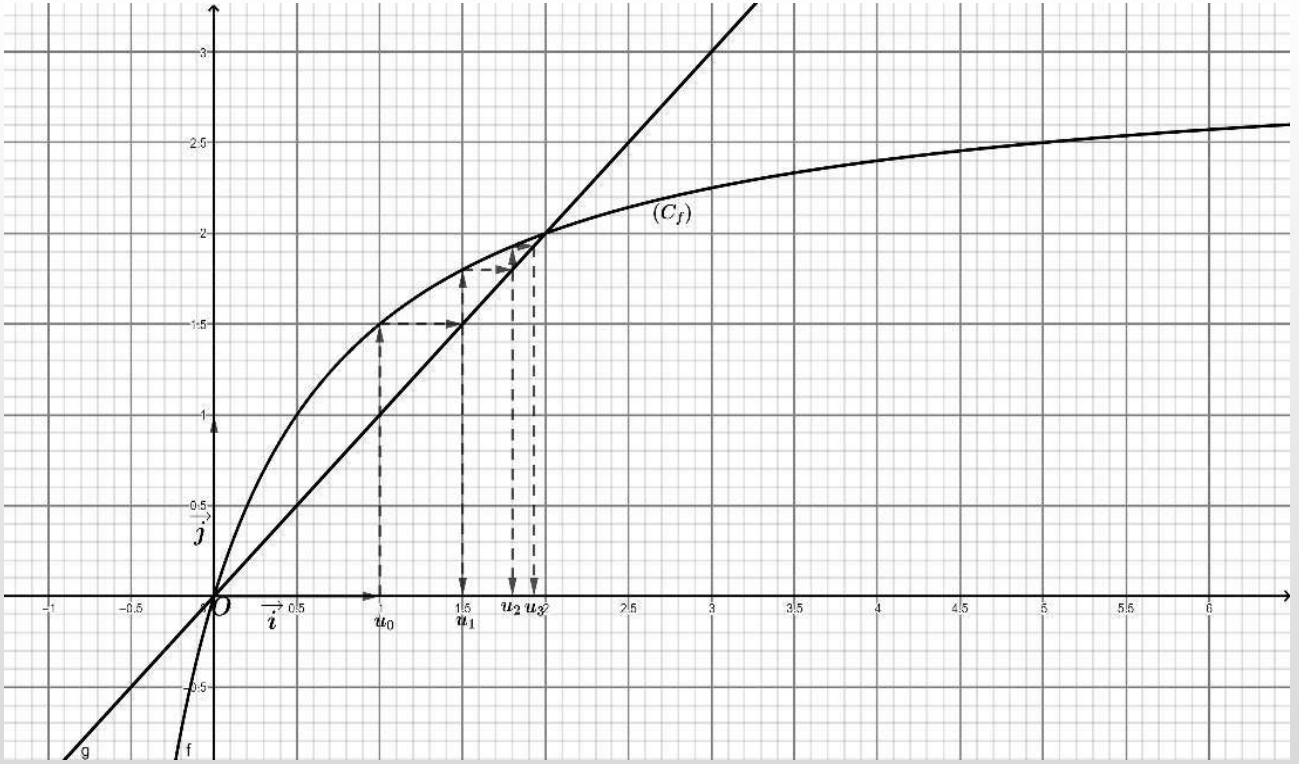
$A(e^{-1}; e - e^{-1})$  .

معادلة المماس  $(T)$  :  $y_T = f'(e^{-1})(x - e^{-1}) + f(e^{-1}) = -x + e^{-1} + e - e^{-1} = -x + e$

6 - إنشاء المستقيم  $(\Delta)$  ، المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$  :

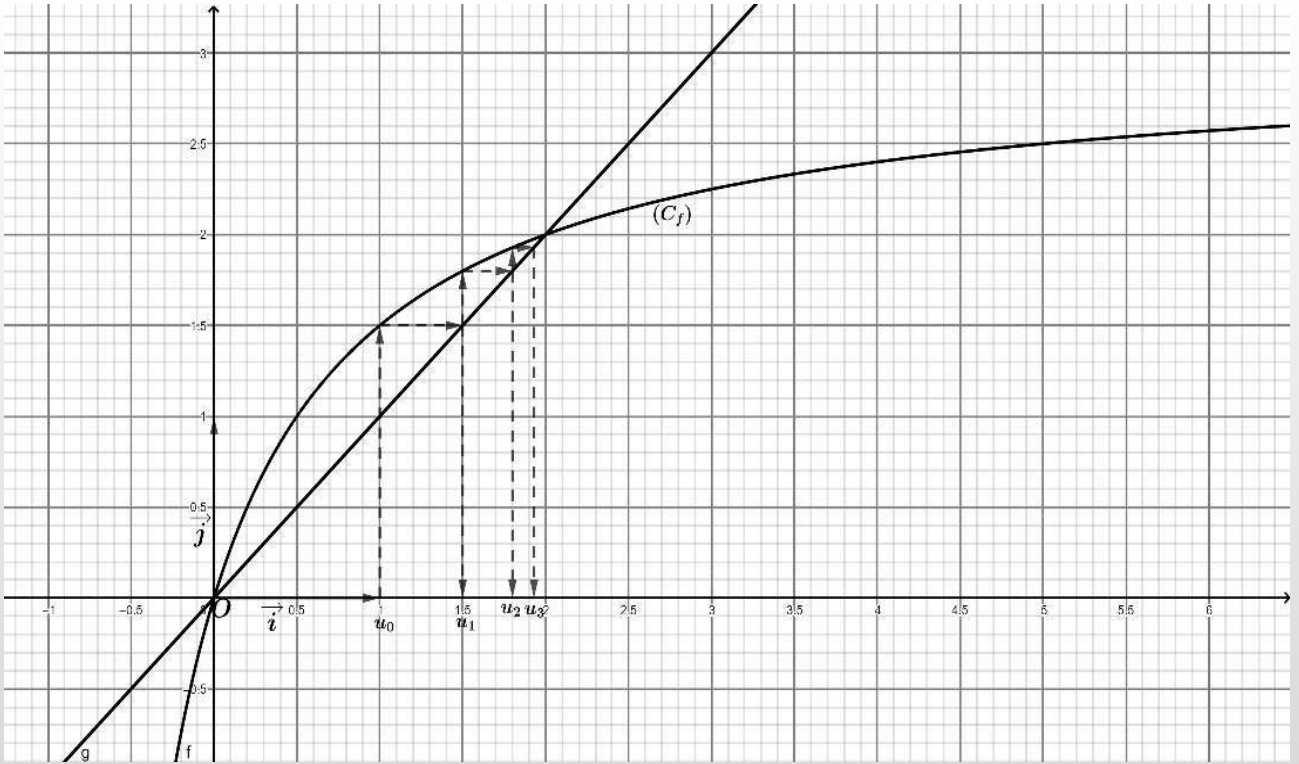


### الوثيقة المرفقة



تُصق الوثيقة المرفقة مع الإجابة النموذجية على الكراس

### الوثيقة المرفقة



تُصق الوثيقة المرفقة مع الإجابة النموذجية على الكراس

## الموقع الأول لتحضير الفروض والاختبارات في الجزائر

<https://www.dzexams.com>

|                                                                             |                         |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/0ap">https://www.dzexams.com/ar/0ap</a> | القسم التحضيري          |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/1ap">https://www.dzexams.com/ar/1ap</a> | السنة الأولى ابتدائي    |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/2ap">https://www.dzexams.com/ar/2ap</a> | السنة الثانية ابتدائي   |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/3ap">https://www.dzexams.com/ar/3ap</a> | السنة الثالثة ابتدائي   |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/4ap">https://www.dzexams.com/ar/4ap</a> | السنة الرابعة ابتدائي   |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/5ap">https://www.dzexams.com/ar/5ap</a> | السنة الخامسة ابتدائي   |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/bep">https://www.dzexams.com/ar/bep</a> | شهادة التعليم الابتدائي |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/1am">https://www.dzexams.com/ar/1am</a> | السنة الأولى متوسط      |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/2am">https://www.dzexams.com/ar/2am</a> | السنة الثانية متوسط     |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/3am">https://www.dzexams.com/ar/3am</a> | السنة الثالثة متوسط     |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/4am">https://www.dzexams.com/ar/4am</a> | السنة الرابعة متوسط     |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/bem">https://www.dzexams.com/ar/bem</a> | شهادة التعليم المتوسط   |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/1as">https://www.dzexams.com/ar/1as</a> | السنة الأولى ثانوي      |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/2as">https://www.dzexams.com/ar/2as</a> | السنة الثانية ثانوي     |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/3as">https://www.dzexams.com/ar/3as</a> | السنة الثالثة ثانوي     |
| <a href="https://www.dzexams.com/ar/bac">https://www.dzexams.com/ar/bac</a> | شهادة البكالوريا        |