



ديسمبر 2019

المستوى: الثالثة ثانوي رياضيات

المدة: 2.5 سا

الاختبار الثلاثي الأول في الرياضيات

التمرين الأول (4.5 نقط)

اجب بصحيح و خطأ مع التبرير

(1) f الدالة المعرفة على $[0 ; 2\pi]$ كما يلي: $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$. (C_f) منحنىها البياني .

(أ) - من اجل كل عدد حقيقي x من $[0 ; 2\pi]$ تكون $f'(x) = e^{-x} \cdot (\sin x + \cos x)$:

(ب) - من اجل كل عدد حقيقي x من $[0 ; 2\pi]$ تكون $f'(x) = \sqrt{2} e^{-x} \cdot \cos(x + \frac{\pi}{4})$:

(ج) - المماس للمنحنى (C_f) عند المبدأ معادلته هي $y=x$:

(2) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $k(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$. (C_k) منحنىها البياني .

(أ) - المبدأ O هو مركز تناظر للمنحنى (C_k)

(ب) - $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$

(ج) - من اجل كل عدد حقيقي x تكون $k'(x) = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$:

التمرين الثاني (7.5 نقطة)

الجزء الأول

نعتبر الدالة f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f_\alpha(x) = e^{2x} - 2\alpha e^x + 3$

و ليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O ; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) عين حسب الوسيط الحقيقي α عدد القيم الحدية للدالة f_α .

عين بدلالة α إحداثي النقطة ω_α النقطة الحدية في حالة وجودها .

الجزء الثاني

نضع في كل ما يأتي: $\alpha=1$ ، و لتكن f_1 الدالة التي نريد دراستها و (C_1) تمثيلها البياني :

(1) ادرس تغيرات الدالة f_1 و المستقيمات المقاربة .

(2) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$.

(3) ارسم كلا من (T) و (C_1) .

(4) ليكن (D_m) المستقيمات المعرفة ب: $y = mx + 3 - m \ln 2$ ، حيث m وسيط حقيقي .

(أ) بين أن المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها .

(ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد نقاط تقاطع (C_1) مع (D_m) .

(5) نعتبر g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$$

(أ) اكتب $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$.

ثم بين أن (C_1) و (C') متناظران بالنسبة للمستقيم (d) يطلب تحديد معادلته .

(ب) ارسم المنحنى (C') منحنى الدالة g في المعلم السابق .

التمرين الثالث (8 نقطة)

الجزء الأول

نعتبر الدالتين h و g المعرفتين على المجال $]0; +\infty[$ ب:

$$g(x) = x - 1 - \ln x \quad ; \quad h(x) = x + (x-2) \ln x$$

(1) أ) ادرس تغيرات الدالة g .

ب) استنتج أن $g(x) \geq 0$ من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$.

(2) بين انه من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $h(x) = 1 + g(x) + (x-1) \ln x$

(3) أ) بين انه من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $(x-1) \ln x \geq 0$

ب) استنتج إشارة $h(x)$.

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب:

$$f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب النهايات عند أطراف مجال التعريف. فسر النتيجة هندسيا.

(2) أ) بين انه من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول التغيرات.

(3) أ) عين معادلة (Δ) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب) بين انه من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f(x) - x = (\ln x - 1) g(x)$

ج) ادرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (Δ) .

(4) أنشئ (C_f) و (Δ) .

الجزء الثالث

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < e$

بالتوفيق

الرياضيات كالخيال و الخيال هو السلاح الوحيد الذي نمتلكه لمواجهة الواقع.

التصحيح النموذجي

العلامة		الحل	رقم التمرين								
4.5 ن	0.75	(1) خطأ لأن $f'(x) = e^{-x} \cdot (\cos x - \sin x)$ (ب) صحيح. (ج) صحيح. (2) خطأ الدالة زوجية معناه تقبل محور تناظر. (ب) خطأ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty$ (ج) صحيح.	التمرين 1								
	0.75										
	0.75										
	0.75										
	0.75										
	0.75										
7.5 ن	0.5	الجزء الأول $f'_\alpha(x) = 2e^{2x} - 2\alpha e^x$ (1) القيم الحدية للدالة تحقق $f'_\alpha(x) = 0$ ومنه $e^x = \alpha$ $\alpha \leq 0$ لا توجد قيم حدية للدالة $\alpha \geq 0$ تقبل قيمة حدية هي $w_\alpha(\ln \alpha; f(\ln \alpha))$ (2) القيمة الحدية هي $w_\alpha(\ln \alpha; 3 - \alpha^2)$ الجزء الثاني (1) دراسة تغيرات و المستقيمات المقاربة للدالة $f'_1(x) = 2e^{2x} - 2e^x$ جدول الإشارة <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table> f_1 متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ و متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ النهايات $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 3$ و منه $y = 3$ مستقيم مقارب افقي بجوار للمنحنى $-\infty$.	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	التمرين 2
	x		$-\infty$	0	$+\infty$						
	$f'(x)$		-	0	+						
	0.5										
	0.5										
	0.25										
	0.25										
	0.25										
	0.5										
	0.25										
0.25											
0.25											

جدول التغيرات

0.5

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	3	2	$+\infty$

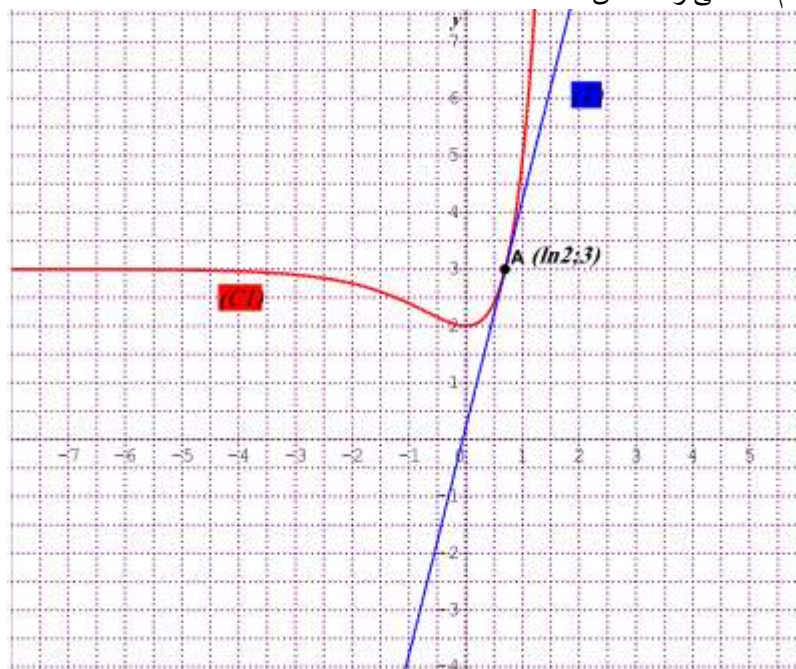
(2) معادلة المماس

0.5

$$(T): y = 4x - 4\ln 2 + 3$$

(3) رسم المنحني و المماس

0.75



(4) أ) المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة ذات الإحداثيات $A(\ln 2 ; 3)$

ب) المناقشة البيانية الدوارنية

عدد نقط تقاطع (C_1) مع (D_m)

لما $m \leq 0$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطة وحيدة هي $A(\ln 2 ; 3)$

لما $0 < m < 4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداهما $A(\ln 2 ; 3)$

لما $m = 4$ (C_1) يمس (D_m) في النقطة $A(\ln 2 ; 3)$

لما $m > 4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداهما $A(\ln 2 ; 3)$

0.75

0.5

(5) أ) $g(x) = 6 - f_1(x)$

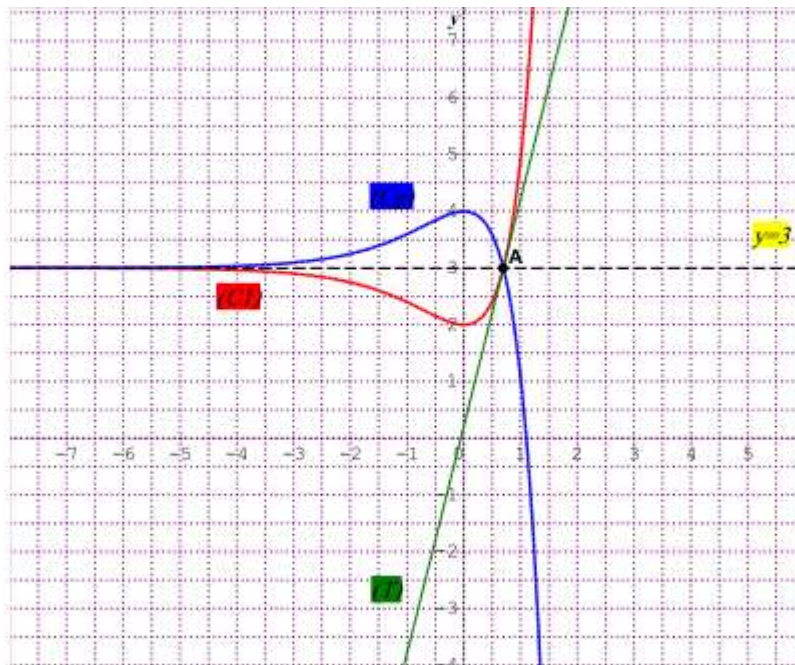
0.25

(C') و (C₁) متناظران بالنسبة للمستقيم (d) ذو المعادلة $y=3$

(ب) رسم المنحنى (C')

0.5

0.75



التمرين 3

0.25

الجزء الأول

(1) أ) دراسة تغيرات الدالة g .

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

جدول الإشارة

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

7 ن 0.25

g متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$ و متناقصة تماماً على المجال $]0; 1]$
جدول التغيرات

0.5

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

0.5

(ب) استنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$.
من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة تقبل قيمة حدية صغرى

0.5

(2) نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $h(x) = 1 + g(x) + (x-1) \ln x$

$$\begin{aligned}
 h(x) &= x + (x-2) \ln x \\
 &= x + x \ln x - 2 \ln x \\
 &= x + x \ln x - \ln x - \ln x - 1 + 1 \\
 &= 1 + (x - 1 - \ln x) + (x-1) \ln x \\
 &= 1 + g(x) + (x-1) \ln x
 \end{aligned}$$

0.5

(3) أ) نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $(x-1) \ln x \geq 0$
جدول الإشارة

x	0	1	$+\infty$
$(x-1) \ln x$	+	0	+

0.5

(ب) استنتاج إشارة $h(x)$.

0.5

$$h(x) \geq 0$$

الجزء الثاني

النهايات

1

$$; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$x=0$ مستقيم مقارب للمنحنى.

0.5

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \ln(x) + 1 - 2 \frac{\ln(x)}{x} \\
 f'(x) &= \frac{h(x)}{x}
 \end{aligned}$$

(ب) اتجاه التغير
جدول الإشارة

0.5

x	0	$+\infty$
-----	---	-----------

$h(x)$

+

0.5

 f متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ (3) (Δ) معادلة مماس (C_f) $(\Delta): y = x$

0.5

ب) نبين انه من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f(x) - x = (\ln x - 1) g(x)$$

$$f(x) - x = 1 + x \ln x - (\ln x)^2 - x$$

$$= x(\ln x - 1) + 1 - (\ln x)^2$$

$$= x(\ln x - 1) - ((\ln x)^2 - 1)$$

$$= (\ln x - 1)(x - 1 - \ln x)$$

$$f(x) - x = (\ln x - 1) g(x)$$

و منه

0.5

ج) إشارة $f(x) - x$

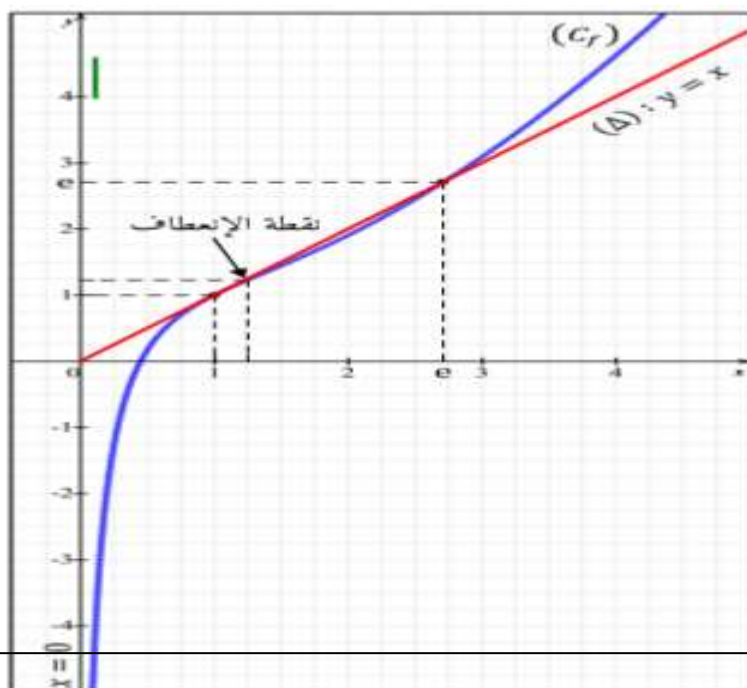
جدول الإشارة

x	0	1	e	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	-	+

0.5

 (C_f) فوق (Δ) في المجال $]e; +\infty[$ (C_f) تحت (Δ) في المجال $]0; 1[\cup]1; e[$

0.5

 (C_f) يقطع (Δ) في النقطتين $(e; e)$ و $(1; 1)$ (4) إنشاء (C_f) و (Δ) 

0.5

الجزء الثالث

(1) البرهان بالتراجع أن : $1 < u_n < e$ $P(n)$

من أجل $n=0$ فإن $1 < u_0 < e$ إذن $P(n)$ صحيحة .

نبرهن صحة $1 < u_{n+1} < e$

لدينا $1 < u_n < e$. و الدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) متزايدة تماماً على المجال $]1 ; e[$

ومنه $1 < u_{n+1} < e$

و منه $P(n+1)$ صحيحة