

الفرض الأول للفصل الأول

التمرين 1

i.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من : $1+x \leq e^x$

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$: $0 < 1 - e^{-x} < x$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$: $0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$

$$\text{ج- بين أن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} = \frac{-1}{2}$$

التمرين 2

g الدالة المعرفة و القابلة للاشتقاق على $] -\infty; 1]$ ب : $g(x) = (ax + b)e^x - 1$ و a و b عدنان حقيقيان).

(I) في الشكل أدناه، (C') هو التمثيل البياني للدالة g' مشتقة الدالة g .

(1) اذا علمت أن (C') يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $-\frac{5}{4}$ ، و يقطع حامل محور الترتيب في النقطة ذات الترتيبة 5 ، وأنه يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة $-\frac{9}{4}$.

(ا) بقراءة بيانية ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ماذا تمثل النقطة A ؟

(ب) عين العددين a و b .

(في باقي التمرين نضع $a = 4$ و $b = 1$)

(2) (ا) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g على المجال $] -\infty; 1]$.

(ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $] -\infty; 1]$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $] -\infty; 1]$ بـ : $f(x) = x - (4x - 3)e^x$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ا) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) مع تحديد نقطة تقاطعهما.

(2) ا) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. (لاحظ أن $f'(x) = -g(x)$).

ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $-2 < \alpha < -\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{4} < \beta < 1$.

(3) ا) اكتب معادلة لـ (Δ') مماس (C) الذي يوازي (Δ) ، ثم ارسم المستقيمين (Δ) و (Δ') و المنحنى (C) .

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و عدد حلول المعادلة $(4x - 3)e^x = m$.

(4) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $] -\infty; 1]$ بـ : $h(x) = (4x - 3)e^x$.

ا) بين أنه من أجل كل x من المجال $] -\infty; 1]$ فإن : $h(x) = 2h'(x) - h''(x)$.

مهما كان السؤال صعب تفكر أن الاجابة
موجودة في أحد الدروس التي تطرقنا لها فقط
فكر كيف تستخدم الدرس بطريقة جيدة للوصول
إلى الحل

حل التمرين الأول

I.

(1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $1+x \leq e^x$:

نفرض الدالة h المعرفة على $h(x) = e^x - x - 1$ كمايلي

لندرس تغيرات الدالة h :

♦ النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x - 1 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x - 1 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$

♦ المشتقة : $h'(x) = e^x - 1$

♦ جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

من خلال الجدول نستنتج أن الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى عند 0 هي 0

إذن $h(x) > 0$ ومنه $e^x - x - 1 > 0$ إذن $e^x > x + 1$

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$: $0 < 1 - e^{-x} < x$

♦ لدينا $x > 0$ أي $-x < 0$ ومنه $e^{-x} < e^0$ ومنه $e^{-x} < 1$ إذن $0 < 1 - e^{-x}$ (1).....

♦ لدينا $e^x > x + 1$ باستبدال x ب $-x$ نجد $e^{-x} > -x + 1$ ومنه $x > 1 - e^{-x}$ أي $1 - e^{-x} < x$ (2).....

من خلال (1) و (2) نجد $0 < 1 - e^{-x} < x$

ث- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$: $0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{2}$

♦ نفرض الدالة g حيث $g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$

دراسة اتجاه تغير الدالة g : لدينا $g'(x) = -1 + x + e^{-x}$

مما سبق نجد أن $g'(x) = -1 + x + e^{-x} > 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$

إذن لدينا : $x > 0$ أي $g(x) > g(0)$ ومنه $1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} > 0$ ومنه $1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} > 0$ (1).....

• لنفرض الدالة k حيث $k(x) = \frac{x^3}{6} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + e^{-x}$

لدينا $k'(x) = g(x) > 0$ نلاحظ أن $k'(x) = \frac{x^2}{2} + 1 - x - e^{-x}$

ومنه الدالة k متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$

إذن لدينا : $x > 0$ أي $k(x) > k(0)$ ومنه $\frac{x^3}{6} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + e^{-x} > 0$ إذن $1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} < \frac{x^3}{6}$ (2).....

إذن من خلال (1) و (2) نجد $0 < 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} < \frac{x^3}{6}$

ج- تبين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$

لدينا $0 < 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} < \frac{x^3}{6}$ أي $-\frac{x^2}{2} < 1 - x - e^{-x} < \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$ ومنه $-\frac{1}{2} < \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} < \frac{x}{6} - \frac{1}{2}$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ وباستعمال النهاية بالمقارنة نجد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$

حل التمرين 2

x	$-\infty$	$-5/4$	1
$g'(x)$	$-$	0	$+$

(I) 1 1 إشارة $g'(x)$:

لما : $x \in [-\frac{5}{4}; +\infty[$ متزايدة تماما

لما : $x \in]-\infty; -\frac{5}{4}]$ متناقصة تماما.

A تمثل نقطة انعطاف لـ $\mathcal{C}$. تعيين العددين a و b :

لدينا : $g'(x) = (ax + a + b)e^x$

$$b = 1 \text{ و } a = 4 : \text{ ومنه } \begin{cases} -\frac{a}{4} + b = 0 \\ a + b = 5 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} g'(-\frac{5}{4}) = 0 \\ g(0) = 5 \end{cases}$$

2 1 حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة g على المجال $] -\infty; 1]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4xe^x + e^x - 1) = -1$$

$$g'(x) = (4x + 5)e^x : \text{لدينا}$$

x	$-\infty$	$-5/4$	1
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1	-2.15	12.6

ب حساب $g(0)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $] -\infty; 1]$:

لدينا : $g(0) = 0$ ، إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	0	1
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1 1 حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 4xe^x + 3e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4xe^x + 3e^x) = 0$$

$\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x$.

ب دراسة وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) :

$$\text{إشارة : } f(x) - y = e^x(-4x + 3)$$

x	$-\infty$	$3/4$	1
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

لما : $x \in] -\infty; \frac{3}{4}[$ $(\mathcal{C})$ فوق (Δ)

لما : $x \in] \frac{3}{4}; 1]$ $(\mathcal{C})$ تحت (Δ)

$(\mathcal{C})$ يقطع (Δ) عند $B(\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$.

2 1 دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا :

$$f'(x) = 1 - (4e^x + e^x(4x - 3)) = 1 - (1 + 4x)e^x = -g(x)$$

f متزايدة تماما على $] -\infty; 0]$ و متناقصة تماما على $[0; 1]$.

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	$1 - e$

ب) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $-\frac{5}{4} < \alpha < -2$ و $\frac{3}{4} < \beta < 1$:

f مستمرة و متزايدة تماما على $]-2; -\frac{5}{4}[$ و $\begin{cases} f(-2) \approx -0.51 \\ f(-\frac{5}{4}) \approx 1.04 \end{cases}$ اي : $f(-2) \times f(-\frac{5}{4}) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-\frac{5}{4} < \alpha < -2$.

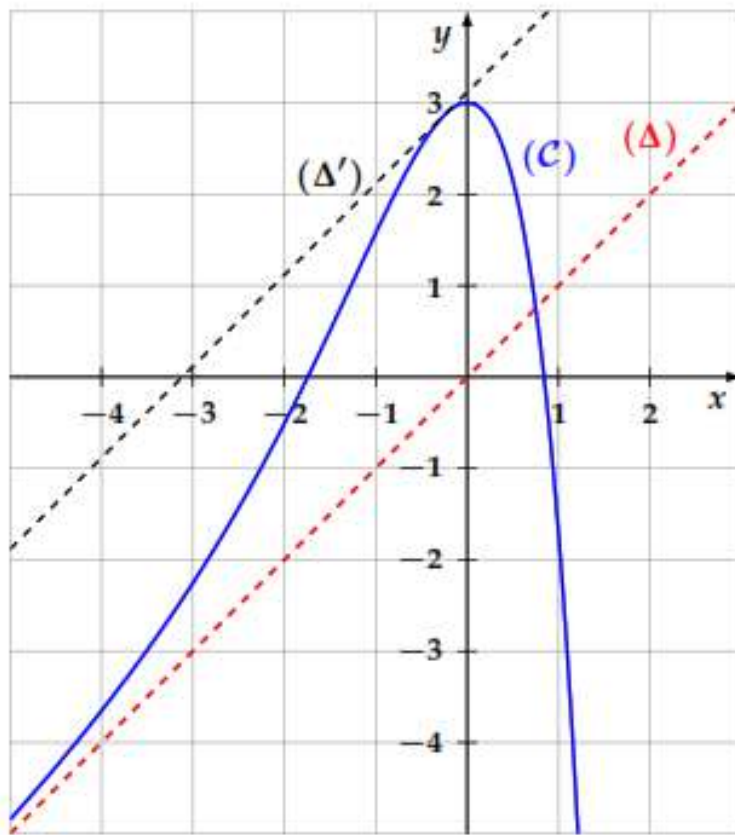
كذلك f مستمرة و متناقصة تماما على $]\frac{3}{4}; 1[$ و $\begin{cases} f(\frac{3}{4}) \approx 0.75 \\ f(1) \approx -1.72 \end{cases}$ أي : $f(\frac{3}{4}) \times f(1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $\frac{3}{4} < \beta < 1$.

3 1 كتابة معادلة لـ (Δ') مماس (C) الذي يوازي (Δ) :

(Δ') يوازي (Δ) يعني أن لهما نفس الميل $f'(x_0) = 1$, تكافئ : $1 - e^{x_0}(4x_0 + 1) = 1$ ومنه : $x_0 = -\frac{1}{4}$
معادلة المماس (Δ') :

$$y = 1(x + \frac{1}{4}) + f(-\frac{1}{4}) = x + 4e^{-\frac{1}{4}}$$

الرسم :



ب) المناقشة البيانية :

$(4x - 3)e^x = m$ تكافئ $x - (4x - 3)e^x = x - m$ تكافئ : $f(x) = x - m$ الحل عبارة عن فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات المائلة (ميلها 1)

المستقيمات المساعدة هي : $y = x$, $y = x + 4e^{-\frac{1}{4}}$, و $y = x - e$ (مستقيم ميله 1 ويشمل النقطة $(C(1; 1 - e))$).

• $-m < -e$ أي : $m > e$: لا يوجد حلول.

• $-e \leq -m \leq 0$ أي : $0 \leq m \leq e$: حل وحيد.

• $0 < -m < 4e^{-\frac{1}{4}}$ أي : $-4e^{-\frac{1}{4}} < m < 0$: حلان متميزان.

• $-m = 4e^{-\frac{1}{4}}$ أي : $m = -4e^{-\frac{1}{4}}$: حل وحيد.

• $-m > 4e^{-\frac{1}{4}}$ أي : $m < -4e^{-\frac{1}{4}}$: لا يوجد حلول.

4 1 تبيان أنه من أجل كل x من المجال $] -\infty; 1]$ فإن : $h(x) = 2h'(x) - h''(x)$:
 $h''(x) = (4x + 5)e^x, h'(x) = (4x + 1)e^x, h(x) = (4x - 3)e^x$
ومنه : $h(x) = 2h'(x) - h''(x)$