

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول :

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل ممالي:

① قيمة المجموع S حيث: $S = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2024}{2025}\right)$ هي: $S = -\ln(2025)$

② القيمة المتوسطة للدالة f على $[1; 2]$ حيث: $f(x) = 1 + \frac{3(\ln x)^2}{x}$ هي: $m = 1 + (\ln 2)^3 - (\ln 3)^3$

③ f دالة سالبة تماما على $[1; 4]$ إذا كانت F دالة أصلية لـ f على $[1; 4]$ فإن: $F(1.1) < F(3.4)$

④ مجموعة حلول المعادلة $\ln(x+1) + \ln(3x-2) = 3 \ln 2$ هي $S = \{-2; \frac{5}{3}\}$

⑤ لتكن h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$ ، الدالة الأصلية H للدالة h على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0 هي:
 $H(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1)$

⑥ a, b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية، عندئذ $\ln a, \ln b$ و $\ln c$ تشكل ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية.

التمرين الثاني :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{6}{5}$

① أحسب u_1 و u_2

② أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عد طبيعي n : $u_n > 2$

ب) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

③ (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \alpha$

أ) عين قيمة α حتى تكون (v_n) هندسية

أ نضع: $\alpha = -2$

ب) أكتب v_n بدلالة n . ثم استنتج u_n بدلالة n

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

④ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$

⑤ (w_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \ln v_n$

أ) أكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج أن (w_n) متتالية حسابية.

ب) أكتب P_n بدلالة n حيث: $P_n = \ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n)$

التمرين الثالث :

I الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 3x^3 - 2 + 4 \ln x$

① أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

② أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

③ أثبت وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0.9; 1[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$

④ حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

II الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 3x - 2 - \frac{2 \ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (تؤخذ وحدة الطول 2 cm)

① أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (يعطى $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$)

② بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ وفسر النتيجة بيانياً.

③ أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = 3x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) عين الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

④ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

⑤ أنشئ كلا من (Δ) و (C_f) . (نختار: $f(\alpha) = 0.9$)

⑥ دالة F معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{2 + 2 \ln x}{x}$

أ) بين أن F دالة أصلية لـ f .

ب) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين

معادتهما $x = 1$ و $x = 2$

تمديد اختيار الثلاثي الثاني "3" تيسر واقتضاه :

الترتيب 1.0 :

① مديد :

$$\begin{aligned} & \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2024}{2025}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2024}{2025}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2025}\right) = -\ln(2025) \end{aligned}$$

② خط :

$$m = \frac{1}{2-1} \int_1^2 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} m &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(1 + 3 \frac{(\ln x)^2}{x}\right) dx \\ &= \left[x + 3 \times \frac{1}{3} (\ln x)^3\right]_1^2 \\ &= \left[x + (\ln x)^3\right]_1^2 \\ &= 2 + (\ln 2)^3 - 1 - (\ln 1)^3 \\ &= 1 + (\ln 2)^3 \end{aligned}$$

③ خط :

لدينا : $1.1 < 3.4$

فإن $F'(x) = f(x)$ و f سالبة
فإن F متزايدة فالتالي

$$F(1.1) > F(3.4)$$

④ خط :

$$\begin{aligned} \ln(x+1) + \ln(3x-2) &= 3\ln 2 \\ \ln(x+1)(3x-2) &= \ln 8 \end{aligned}$$

أذن :

$$(x+1)(3x-2) = 8$$

$$3x^2 + x - 2 - 8 = 0$$

أذن

$$3x^2 + x - 10 = 0$$

أذن :

$$\Delta = (1)^2 - 4(3)(-10)$$

$$\Delta = 121$$

$$x_1 = \frac{-1 - 11}{2 \times 3} = -\frac{12}{6} = -2$$

مرفوض

$$x_2 = \frac{-1 + 11}{2 \times 3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

مقبول

- نفسا مجموعة تعريف المعادلة

$$3x-2 > 0 \quad \text{أذن} \quad x > \frac{2}{3}$$

$$D =]\frac{2}{3}; +\infty[\quad \text{أذن} \quad \boxed{x > \frac{2}{3}}$$

$$S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

أذن

⑤ مديد :

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt = \int_0^x \frac{t^3}{t^4+1} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^x \frac{4t^3}{t^4+1} dt = \frac{1}{4} \left[\ln(t^4+1) \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{4} \left[\ln(x^4+1) - \ln 1 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \ln(x^4+1)$$

⑥ مديد :

$$axe = b^2$$

$$\ln(axe) = \ln b^2$$

أذن :

$$\ln a + \ln e = 2 \ln b$$

التقريب 2.0:

$$u_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + \frac{6}{5}, \quad u_0 = 3$$

$$u_1 = \frac{2}{5} u_0 + \frac{6}{5} = \frac{2 \times 3 + 6}{5} \quad (1)$$

$$u_1 = \frac{6}{5} + \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$$

$$u_2 = \frac{2}{5} u_1 + \frac{6}{5} = \frac{2 \times 12 + 6}{5}$$

$$u_2 = \frac{24}{5} + \frac{6}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

(2) نرى هنا بالتتابع أنه متناقص
عدد طبيعي $u_n > 0$

نضع: $P(n) : u_n > 2$

لدينا $u_0 = 3 > 2$ إذن $P(0)$ صحيحة.

نقرب أن $P(n)$ صحيحة هنا أجل
نحسب ونرى أنها صحيحة هنا أجل
 $n+1$

لدينا $\frac{2}{5} u_n > \frac{2}{5} \times 2$ إذن $\frac{2}{5} u_n > \frac{4}{5}$

إذن $\frac{2}{5} u_n + \frac{6}{5} > \frac{4}{5} + \frac{6}{5} = \frac{10}{5} = 2$

وهذه: $\frac{2}{5} u_n + \frac{6}{5} > 2$ إذن

$$u_{n+1} > 2$$

حسب هذا الاستدلال بالتتابع $P(n)$
صحيحة هنا لكل عدد طبيعي n .

(ب) إثبات أن (u_n) متناقص ومتكامل

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5} u_n + \frac{6}{5} - u_n$$

$$= \left(\frac{2}{5} - 1\right) u_n + \frac{6}{5}$$

$$= -\frac{3}{5} u_n + \frac{6}{5}$$

$$= -\frac{3}{5} (u_n - 2)$$

لدينا $u_n > 2$ إذن $u_n - 2 > 0$ ومنه

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{5} (u_n - 2) < 0$$

وهذه (u_n) متناقص ومتكامل.

$$v_n = u_n + \alpha \quad (3)$$

أفترض أن α ثابتة و (v_n) متناقص

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{2}{5} u_n + \frac{6}{5} + \alpha$$

$$= \frac{2}{5} u_n + \frac{2}{5} \alpha + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} \alpha$$

$$= \frac{2}{5} (u_n + \alpha) + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} \alpha$$

$$= \frac{2}{5} v_n + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} \alpha$$

نريد أن تكون (v_n) متناقص

$$\frac{6}{5} + \frac{3}{5} \alpha < 0 \Rightarrow \frac{3}{5} \alpha < -\frac{6}{5}$$

$$\alpha < -\frac{6}{3} = -2 \quad \text{إذن} \quad 3\alpha < -6$$

$$\alpha < -2$$

نضع $\alpha = -2$

$$v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$v_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$u_n = v_n + 2$$

$$u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$\left| -1 < \frac{2}{5} < 1 \right| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

$$S_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2 \quad (4)$$

$$= v_0^2 \times \frac{1 - (q^2)^{n+1}}{1 - q^2}$$

② دراسة الجاه تغير الدالة ثم تبديل جذر البعد

g دالة قابلة للإستغناء على $[0, +\infty[$

$$g'(n) = 3x^2 + \frac{4}{n} > 0$$

اذن g متزايدة تمامًا على $[0, +\infty[$
جذر البعد:

n	0	$+\infty$
$g'(n)$		+
$g(n)$	$-\infty$	$+\infty$

3 / g دالة متزايدة تمامًا على $[0, 9, 1]$

$$g(0,9) = 3(0,9)^3 - 2 + 4\ln(0,9) = -0,23$$

$$g(1) = 3(1)^3 - 2 + 4\ln 1 = 1$$

فإن $g(0,9) \times g(1) < 0$ اذن حسب

مبرهنة القيمة المتوسطة المعادلة $g(n) = 0$ لها

حلاً وحيداً في $[0, 9, 1]$

(4) امتار $g(n)$ حسب قيم n :

n	0	α	$+\infty$
$g(n)$		-	+

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3x - 2 - \frac{2\ln x}{x^2} \quad (II)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (2) \text{ ثبات أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3x - 2 - \frac{2\ln x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 1^2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} \quad (4) \\ &= \frac{1 - \left(\frac{4}{25}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{1 - \left(\frac{4}{25}\right)^{n+1}}{\frac{21}{25}} \\ &= \frac{25}{21} \left(1 - \left(\frac{4}{25}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$w_n = \ln v_n \quad (5)$$

$$w_n = \ln\left(\frac{2}{5}\right)^n = n \ln\left(\frac{2}{5}\right) \quad (f)$$

اذن (w_n) متساوية لـ $\ln\left(\frac{2}{5}\right)$

(L) كتاب w, b, P_n :

$$P_n = \ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n)$$

$$= \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n$$

$$= w_0 + w_1 + \dots + w_n$$

$$= \frac{(n+1)}{2} (w_0 + w_n)$$

$$= \frac{n+1}{2} (\ln v_0 + n \ln \frac{2}{5})$$

$$= \frac{n+1}{2} (\ln 1 + n \ln \frac{2}{5})$$

$$= \frac{(n+1)n \ln\left(\frac{2}{5}\right)}{2}$$

الترتيب 3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3x^3 - 2 + 4\ln x \quad (7)$$

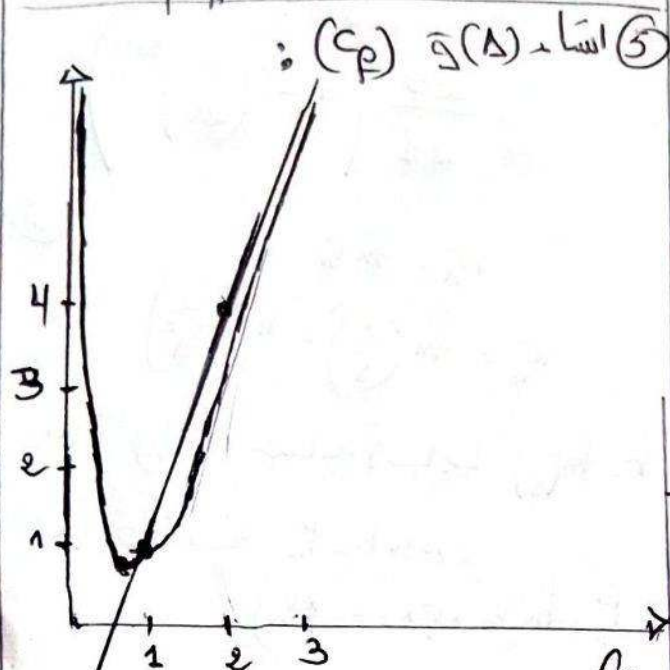
$$= -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3x^3 - 2 + 4\ln x$$

$$= +\infty$$

حد والقياس:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{+}{-}$	$\frac{-}{+}$	$\frac{+}{-}$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$



5) استلزام (Cp) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2 \ln x}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \ln x) \times \frac{1}{n^2} = +\infty$$

القياس الثاني: المقياس في المعادلة $x=0$ مقابل (Cp)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3x - \frac{2 \ln x}{n^2} - (3x - 2) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2 \ln x}{n^2} = [0]$$

(ب) دراسة الوضع النسبي لـ (Cp) و (Δ) :

$$f(x) - y = -\frac{2 \ln x}{n^2}$$

$$[n=1] \text{ يعني } -2 \ln n = 0 \text{ يعني } f(x) - y = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$\frac{+}{-}$	$\frac{-}{+}$	$\frac{+}{-}$
$-\frac{2 \ln x}{n^2}$	$\frac{+}{-}$	$\frac{-}{+}$	$\frac{+}{-}$
الوضع النسبي	(Cp) فوق (Δ)	(Cp) تحت (Δ)	(Cp) تحت (Δ)

(4) f دالة قابلة للاستقامة على $[0, +\infty[$

$$f'(x) = 3 - 2 \frac{\frac{1}{n} \times x^2 - 2x \ln x}{n^4}$$

$$f'(x) = 3 - 2 \frac{n - 2x \ln x}{n^4}$$

$$f'(x) = 3 - \frac{2 - 4 \ln x}{n^3}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 2 + 4 \ln x}{n^3} = \frac{g(x)}{n^3}$$

استنتاج اتجاه تغير f وتبين حد (القياس)

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{+}{-}$	$\frac{-}{+}$	$\frac{+}{-}$

f متزايدة قامة على $[0, \alpha]$
f متزايدة قامة على $[\alpha, +\infty[$

(6) ميان f و F دالة قابلة لـ f :

f دالة متصلة على $[0, +\infty[$:

$$F'(x) = \frac{3}{2} \times 2x - 2 \frac{\ln x}{n^2} = 3x - \frac{2 \ln x}{n^2}$$

$$F'(x) = 3x - 2 - \frac{2 \ln x}{n^2}$$

$$[F'(x) = f(x)]$$

فـ F دالة قابلة لـ f :

$$\int_1^2 (4 - f(x)) dx = \int_1^2 \frac{2 \ln x}{n^2} dx$$

$$= \left[-\frac{2 + 2 \ln x}{n} \right]_1^2 = -\frac{2 + 2 \ln 2 + 2}{2} + \frac{2}{1}$$

$$= -1 - \ln 2 + 2 = 1 - \ln(2e)$$

$$P = 4(1 - \ln 2) \text{ cm}$$