

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن):

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = \frac{1}{4}$

$$u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$$

1(أ) برهن بالتراجع على أنه من اجل كل عدد طبيعي $n : 0 < u_n < 1$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$.

ب) عبر عن v_n بدلالة n .

ح) اوجد عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim u_n$.

3(أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{3}{1-u_{2021}} + \frac{3}{1-u_{2022}} + \dots + \frac{3}{1-u_{2021+n}}$

التمرين الثاني (4 ن):

1(حل في $\square$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول Z التالية: (I) $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$

2(نرمز الى حلي المعادلة (I) بـ Z_1 و Z_2 بين أن: $\left(\frac{Z_1 \times Z_2}{4}\right)^{2021} = 1$

3(نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقاط A, B, C ،

التي لواحقها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 4\sqrt{3} + i$ ،

أ) أنشئ النقاط A, B, C .

ب) أكتب على الشكل الجبري ثم الأسّي العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;2)\}$. ثم أنشئ G .

د) عين Z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABDC$ مربع .

التمرين الثالث: (4,5 ن)

يحتوي كيس على 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها ثلاثة حمراء تحمل الارقام 1,0,1- وأربعة بيضاء تحمل

الأرقام 1,0,1,1- وكرتين خضراء تحمل الأرقام 1, -0 نسحب على التوالي وبدون ارجاع ثلاث كرات من الكيس.

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : سحب ثلاث كرات من نفس اللون.

B : سحب ثلاث كرات مجموع أرقامها معدوم.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد الأصغر من بين الأعداد المسحوبة.

أ) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع (07 ن)

1. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x} - 1$

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على $\square$ حلين أحدهما معدوم والاخر α حيث $-1; 5 < \alpha < -1; 6$

(3) حدد إشارة $g(x)$ على $\square$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$).

(1) أحسب نهاية الدالة f $+\infty$ و عند $-\infty$.

(2) تحقق أنه من أجل $x \in \square$: $f'(x) = g(x)$ واستنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ).

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثيتهما.

(5) أنشئ على المجال $[-2; 5; +\infty[$ كل من (Δ) و (C_f) (تعطى 3; 0 $f(\alpha) = 0$)

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\square$ بـ : $h(x) = |x| + (x^2 - 3|x| + 2)e^{|x|}$ وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$).

أ) برهن أن h دالة زوجية.

ب) اشرح كيفية انشاء المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق

الموضوع الثاني

التمرين الاول (05 ن):

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ كمايلي : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ كما هو موضح في الوثيقة المرفقة
- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الاول $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
- (1) باستعمال الوثيقة المرفقة مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء)
- (2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها
- (3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$ ثم تحقق من صحة تخمينك.
- (4) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$
- أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول
- ب) أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n
- ت) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .
- (5) أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$

التمرين الثاني:(4ن):

- توجد اجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية, اختر الاجابة الصحيحة مبررا اختيارك .
- (1) يحتوي كيس على n كرة حمراء و 4 كرات بيضاء الكرات لا نفرق بينها عند اللمس نسحب من الكيس n كرة على التوالي مع اعادة الكرة المسحوبة الى الكيس بعد كل سحبة احتمال الحصول على كرة حمراء على الاقل هو:
- (أ) $1 - \left(\frac{4}{4+n}\right)^n$ (ب) $\left(\frac{4}{4+n}\right)^n$ (ج) $\left(\frac{n}{n+4}\right)^n$
- (2) Z عدد مركب حيث : $Z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ العدد المركب Z^{2021} يساوي:
- (أ) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (ب) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (ج) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
- (3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقاط A, B, C التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ ، $z_C = 4i$ طبيعة الرباعي $OABC$ هي:
- (ب) مستطيل (ب) معين (ج) متوازي أضلاع.
- (4) حلول المتراجحة : $0 \leq 2\ln(-x+1) - 2$ في المجال $]-\infty; 1[$ هي:
- (أ) $[e-1; 1]$ (ب) $]-\infty; e-1]$ (ج) $]-\infty; 1]$

التمرين الثالث (4ن):

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس منها أربعة بيضاء تحمل الأرقام 1,1,2,3 وثلاثة حمراء تحمل الأرقام 1,2,3 وثلاثة خضراء تحمل الأرقام 1,1,3. نسحب عشوائيا وفي أن واحد ثلاث كرات من الكيس.

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون
 B : الحصول على ثلاث كرات تحمل رقم فردي
 C : الحصول على ثلاث كرات تحمل ألوان العلم الوطني.

(2) بين أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{60}$ ثم احسب $P(A \cup B)$

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات التي تحمل الرقم الفردي .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع (07 ن)

• نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = (x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)$

(1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة g على $]-1; +\infty[$.

(2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$

• نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

2. بين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3. بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 يطلب كتابة معادلته.

4. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ ومادا تستنتج بيانيا؟

5. (Δ) مستقيم معادلته $y = x$ أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

6. أرسم (Δ) و (T) و (C_f) .

7. m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $m(x+1) + \ln(x+1) = 0$

انتهى الموضوع الثاني

