

الاختبار الأول في مادة الرياضيات

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

المدة: ساعتان

التمرين الأول: 12I- الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - x \ln x$ 1- (أ) احسب نهايات الدالة g .(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.2- بين أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3.5 < \alpha < 3.6$.3- استنتج إشارة $g(x) + 1$ على $]0; +\infty[$.II- الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ (C_f) التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 4cm$.1- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقارين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$.2- (أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$ (ب) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.(ج) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.(د) احسب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، فسر النتيجة هندسيا.3- (أ) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.(ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2})(ج) ارسم (C_f) و المماس (T).4- نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي: $(E) \dots \ln(x^2) = x^2 + x - 2m(x+1)$ (أ) تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}x - m$.(ب) عين بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة (E).5- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ ، (C_h) منحناها البياني في المستوي.(أ) بين أن الدالة h زوجية.(ب) اكتب الدالة h بدلالة الدالة f .(ج) ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f).

التمرين الثاني: 8

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (ax + b)e^{x-2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

1- احسب $g'(x)$ بدلالة a و b .

2- عين قيمتي a و b إذا علمت أن منحنى الدالة g يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $A(-3; 1 + 2e^{-5})$.

نأخذ فيما يلي $a = 2$ و $b = 4$

3- أ- ادرس تغيرات الدالة g .

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$ واستنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 e^{x-2} - \frac{1}{4}x^2$ (C_f) تمثيلها البياني (وحدة الطول 2cm)

1- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2}x.g(x)$

3- استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$, ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4- عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

5- أنشئ (C_f) على المجال $[-5; 2]$ (نأخذ $f(\alpha) \approx -0,2$)

III- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = e^{1-f(x)}$

- احسب $h'(x)$ واستنتج إشارتها ثم شكل جدول تغيراتها (دون حساب عبارة $h(x)$)

انتهى بالتوفيق للجميع

الحل النموذجي للاختبار الأول في مادة الرياضيات

السنة الدراسية 2020/2019

المستوى: الثالثة علوم

التمرين الاول:

g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - x \ln x$

(1) حساب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1 - \ln x)] = -\infty$$

(ب) اتجاه تغير الدالة g على $]0; +\infty[$ وجدول تغيراتها:

لدينا $g'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$ ومنه الدالة g متزايدة

تماما على المجال $]0; 1[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$

جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	-
$g(x)$	0	1	$-\infty$

(2) إثبات أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$3.5 < \alpha < 3.6$$

لدينا $g(x) > -1$ من أجل كل x من $]0; 1[$ ، إذن المعادلة

$$g(x) = -1 \text{ لا تقبل حلا في المجال }]0; 1[$$

وفي المجال $]1; +\infty[$ الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما وبما أن:

$$g(3.5) \cong -0.88 > -1 \text{ و } g(3.6) \cong -1.011 < -1 \text{ فإنه}$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا

وحيدا α حيث

(3) إشارة $g(x) + 1$ على $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)+1$		0	-

i. f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

(Cf) التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ حيث: } \|\vec{i}\| = 2\text{cm و } \|\vec{j}\| = 4\text{cm}.$$

(1) إثبات أن المنحنى (Cf) يقبل مستقيمين مقاريين معادلتيهما

$$y = 0 \text{ و } x = 0$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ومنه المنحنى (Cf) يقبل مستقيم

مقارب معادلته $x = 0$.

$$\text{وبما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ فإن المنحنى (Cf)}$$

يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$.

(2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{\frac{x+1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

(ب) إشارة الدالة المشتقة من إشارة $g(x) + 1$ لأن المقام موجب

تماما إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$ ،

جدول تغيرات الدالة f:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{\alpha}$	0

(ج) معادلة للمستقيم المماس (T) للمنحنى (Cf) عند النقطة

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} : 1$$

(د) بما أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ فهي تقبل

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{g(\alpha) + 1}{\alpha(\alpha + 1)^2} = 0 \text{ ولدينا:}$$

نستنتج أن المنحنى (Cf) يقبل مستقيما مماسا موازيا لمحور الفواصل

معادلته $y = f(\alpha)$.

(3) إثبات أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ، لدينا $g(\alpha) = -1$ أي

$$f(\alpha) = \frac{1 + \alpha}{\alpha(1 + \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \text{ ومنه } \ln \alpha = \frac{1 + \alpha}{\alpha}$$

(ب) حصر للعدد f(α): لدينا $3.5 < \alpha < 3.6$ أي $\frac{1}{3.6} <$

$$f(\alpha) < \frac{1}{3.5} \text{ ومنه } 0.27 < f(\alpha) < 0.29$$

(ج) رسم (Cf) في المعلم أدناه.

(4) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط

$$x^2 + x - 2m(x + 1) = \ln(x^2) \dots (E) \text{ حقيقي}$$

(أ) من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، المعادلة (E) تكافئ

$$(x + 1)(x - 2m) = 2 \ln x \text{ أي } x - 2m = \frac{2 \ln x}{x + 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - m \text{ أي } \frac{1}{2}x - m = f(x)$$

(ب) بيانيا: حلول المعادلة (E) فواصل نقط تقاطع

المنحنى (Cf) مع المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x - m$:

من أجل $[-\frac{1}{2}; -\infty[$ أي $[-m\epsilon; -\infty[$ المعادلة تقبل حلين

مختلفين

من أجل $-\frac{1}{2} - m = -\frac{1}{2}$ أي $m = \frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حل .

من أجل $[-\frac{1}{2}; +\infty[$ أي $[-m\epsilon; -\frac{1}{2}]$ المعادلة لا تقبل حلول.

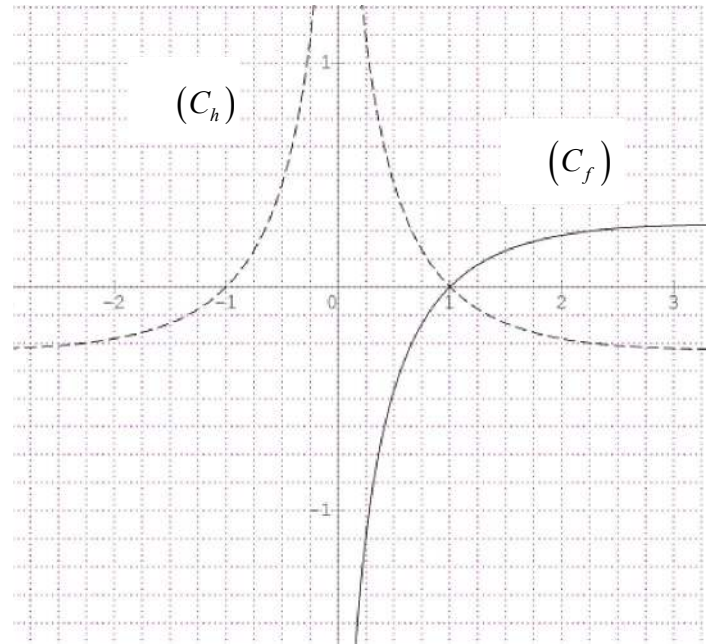
5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$

(C_h) منحناها البياني في المستوي.

نلاحظ أن $h(x) = -f(|x|)$

أ) الدالة h زوجية: لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $h(-x) = -f(|-x|) = -f(|x|) = h(x)$ ، ولدينا: $\mathbb{R}^*$

ب) رسم المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) .



التمرين الثاني :

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (ax + b)e^{x-2}$

حيث a و b عددا حقيقيان.

1- حساب $g'(x)$ بدلالة a و b .

$$g'(x) = -ae^{x-2} - e^{x-2}(ax + b) = -e^{x-2}(ax + a + b)$$

2- تعيين قيمتي a و b علما أن منحنى الدالة g يقبل مماسا

موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $A(-3; 1 + 2e^{-5})$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - (-3a + b)e^{-5} = 1 + 2e^{-5} \\ -e^{-5}(-3a + a + b) = 0 \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} g(-3) = 1 + 2e^{-5} \\ g'(-3) = 0 \end{array} \right. \text{ يكافئ}$$

$$g(x) = 1 - (2x + 4)e^{x-2} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 4 \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 3a - b = 2 \\ -2a + b = 0 \end{array} \right.$$

نأخذ فيما يلي $a = 2$ و $b = 4$

3- أ- دراسة تغيرات الدالة g

$$\text{حساب النهايات: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - (2x + 4)e^{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - (2x + 4)e^{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2xe^{x-2} + 4e^{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2xe^x \times e^{-2} + 4e^{x-2} = 0$$

حساب المشتق: الدالة g قابلة للاشتقاق على ولدنا

$$g'(x) = -e^{x-2}(ax + a + b) = e^{x-2}(-2x - 6)$$

الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty; -3]$ ومتناقصة تماما على $[-3; +\infty[$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	$2 + e^{(-5)} + 1$	$-\infty$

جدول التغيرات:

ب- بيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$0,4 < \alpha < 0,5 \text{ واستنتاج إشارة } g(x).$$

الدالة مستمرة ورتيبة تماما على $[0,4; 0,5]$

$$g(0,4) \times g(0,5) < 0 \quad g(0,5) = -0,16; \quad g(0,4) = 0,03$$

$$\text{II- الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ: } f(x) = x^2 e^{x-2} - \frac{1}{4}x^2$$

$$1- \text{ بين أن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{x-2} - \frac{1}{4}x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x \times e^{-2} - \frac{1}{4}x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{x-2} - \frac{1}{4}x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{x-2} - \frac{1}{4} \right) = +\infty$$

$$2- \text{ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } \mathbb{R} : f'(x) = -\frac{1}{2}xg(x)$$

$$f'(x) = 2xe^{x-2} + e^{x-2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$= -\frac{1}{2}x(1 - (2x + 4)e^{x-2}) = -\frac{1}{2}xg(x)$$

3- استنتاج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$-\frac{1}{2}x$	$+$	$-$	$-$	$-$
$g(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

ومن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty; 0]$ و $[\alpha; +\infty[$

ومتناقصة تماما على $[0; \alpha]$

جدول التغيرات للدالة f

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

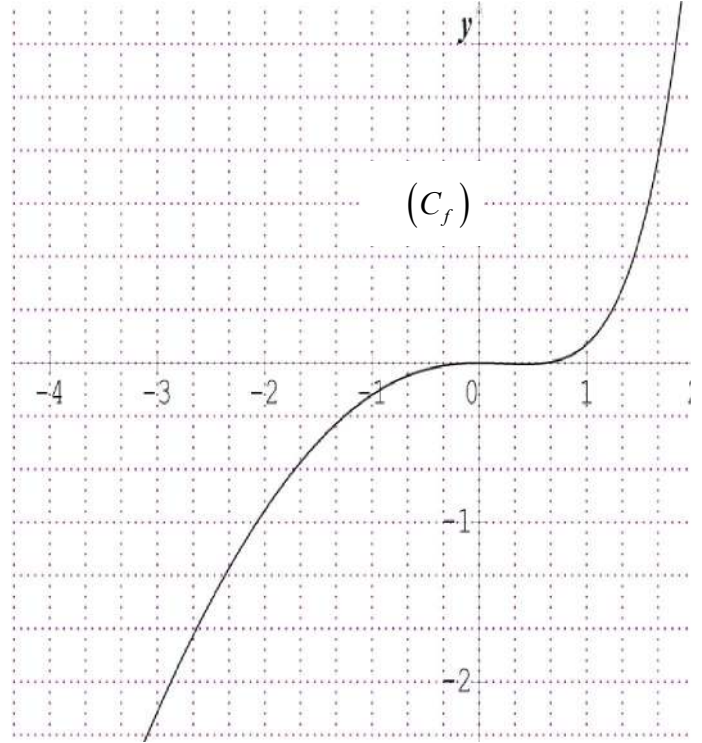
4- تعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

$$f(x) = 0 \text{ ومنه } x^2 e^{x-2} - \frac{1}{4} x^2 = 0 \text{ ومنه } x^2 (e^{x-2} - \frac{1}{4}) = 0$$

$$\text{ومنه } x = 0 \text{ أو } e^{x-2} - \frac{1}{4} = 0 \text{ ومنه } e^{x-2} = \frac{1}{4} \text{ ومنه}$$

$$s = \{2 - \ln 4; 0\} \text{ ومنه } x = 2 - \ln 4$$

5- انشاء (C_f) على المجال $[-5; 2]$ (نأخذ $f(\alpha) = -0,2$)



III- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = e^{1-f(x)}$

- حساب المشتقة: $h'(x) = (e^{1-f(x)})' = -f'(x)e^{1-f(x)}$ ومنه

إشارة $h'(x)$ من إشارة $-f'(x)$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$h'(x)$	-	+	-	

ومنه الدالة h متزايدة تماما على $[0; \alpha]$

ومتناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$ و $]-\infty; 0]$

جدوا التغيرات للدالة h

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$h'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$	e	$e^{1,2}$	0

انتهى بالتوفيق والتميز للجميع

الأستاذ: قشار صلح