الفرض الأول في مادة الرياضيات للفصل الثاني

التمرين الأول [10ن] :

- (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ تحقق :

$$\frac{v_1}{v_0}+\frac{v_2}{v_1}+\frac{v_3}{v_2}+\dots\dots\dots+\frac{v_{n+1}}{v_n}=U_n+4$$

← حيث (U_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها اعداد طبيعية تحقق مايلي :

$$\begin{cases} PGCD(U_3,U_7)=U_1 \\ U_3\times U_7=336 \\ U_1>1 \end{cases}$$

1) جد كل من U_1 ، U_3 ، U_7 ، استنتج الأساس r للمتتالية (U_n) ، ثم عبر عنها بدلالة n .
   أ) بين انه من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n\times U_{n-1}+v_{n+1}-v_n\times U_n=0$.
   ب) استنتج عبارة المتتالية (v_n) بدلالة n .
2) برهن بالتراجع انه مهما كان $n\in\mathbb{N}$: $1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   أ) جد بدلالة n الجداء p_n : $p_n=v_0^{6U_0}\times v_1^{6U_1}\times v_2^{6U_2}\times\dots\dots\dots\times v_n^{6u_n}$.
   ب) عين: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_n}$.
3) حلل العدد 2025 الى جداء عوامل أولية .
   أ) استنتج عدد قواسم العدد 2025 ، ثم عينها كلها .
4) عين $pGCD(216;75,63)$.
   أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية ل 5^n على 3 .
5) نعتبر المعادلة (E_n) ذات المجهولين الصحيحين (x,y) مع $n\in\mathbb{N}$:

$$216x-75y=C_n^0v_0+C_n^1v_1+\dots\dots+C_n^nv_n+2n^2-n+1\dots(E_n)$$

   أ) عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها المعادلة (E_n) تقبل حلول في $\mathbb{Z}$.
   ب) هل المعادلة (E_{2025^2}) تقبل حلول في $\mathbb{Z}$. علل اجابتك ؟
6) في ما يلي نعتبر المعادلة (E) حيث : $216x-75y=6075\dots\dots(E)$ مع $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.
   أ) برر لماذا المعادلة (E) تقبل حلول .
   ب) جد الحل الخاص (x_0,y_0) للمعادلة (E) و الذي يحقق : $\begin{cases} x_0+\sqrt{-y_0}=[pGCD(216,75)]^2 \\ yo^{x_0}=1 \end{cases}$
   ت) استنتج جميع حلول المعادلة (E) .
7) نضع $PGCD(x,y)=d$ مع (x,y) حلول معادلة (E) .
   أ) عين القيم الممكنة ل d .
   ب) استنتج الثنائية (x,y) حلول المعادلة (E) التي يكون من اجلها $\sqrt{d}=45$.
8) جد جميع الثنائيات (x,y) حلول المعادلة E التي تحقق : $y<3x<90+y$.
9) ليكن العدد A الذي يكتب في نظام ذي الأساس 7 : $\overline{56\alpha\alpha}$ و في نظام الأساس 6 : $\overline{\beta3\alpha\beta3}$.
   أ) عين كل من α و β ، ثم اكتب العدد A في نظام العشري .
   ب) اكتب العدد $\sqrt{A}$ في نظام ذو الأساس 7 .