

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: تسيير واقتصاد

دورة: 2020

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- إليك جدول تغيرات دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 2[$ و $]2; +\infty[$.
(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أجب بـ: صحيح أو خاطئ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

- (1) المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.
- (2) النقطة $A(3; 2)$ تنتمي إلى المنحنى (C_f).
- (3) $f(2020) > f(2019)$.
- (4) المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ يقطع (C_f) في نقطة واحدة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يتقاضى موظف خلال 2019 راتبا شهريا ثابتا يقدر بـ 70 000 DA، في شهر جانفي استهلك منه 80% و ابتداءً من شهر فيفري قرّر تخفيض مبلغ الاستهلاك شهريا بنسبة 5% من المبلغ المستهلك في الشهر الذي قبله.

(1) أ. ما هو المبلغ المستهلك في شهر جانفي ؟

ب. حدّد المبلغ المستهلك في شهر فيفري.

(2) نضع: u_1 المبلغ المستهلك في شهر جانفي و u_n المبلغ المستهلك في الشهر n ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

عبّر عن u_{n+1} بدلالة u_n و استنتج أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها 0.95.

(3) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(4) أ. احسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019.

ب. أوجد المبلغ المدخر خلال هذه السنة.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول u_0 حيث: $u_0 = 1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2}$

(1) أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n < \frac{9}{2}$

ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنّها متقاربة .

(2) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{9}{2}$

أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يُطلب حساب حدّها الأول v_0 .

ب. عبّر عن v_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

احسب S_n بدلالة n .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

(1) احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(3) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 2 + x \ln x$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. (يُعطى : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$)

(2) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماما : $f'(x) = g(x)$.

(3) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(4) احسب $f(2)$ ثمّ انشئ (C_f) .

(5) الدالة F معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $F(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + 2x - 8 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$

بيّن أنّ F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة التالية مع التبرير.

- (1) الدالة الأصلية لـ f على $\mathbb{R}$ التي تتعدم من أجل $x=1$ هي الدالة F حيث:
 (أ) $F(x) = x^3 - x^2$ (ب) $F(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2$ (ج) $F(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + \frac{8}{9}$
- (2) القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;1]$ هي:
 (أ) $\frac{1}{9}$ (ب) $-\frac{8}{9}$ (ج) $\frac{8}{9}$
- (3) الدالة f متزايدة تماما على المجال:

(أ) $[3; +\infty[$ (ب) $[-3; +\infty[$ (ج) $]-\infty; 3]$

- (4) المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{-5}{3}$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطتين فاصلتهما:
 (أ) 1 و 5 (ب) 1 و -5 (ج) -1 و -5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المتتالية الهندسية (v_n) حدّها الأول v_0 وأساسها q موجبان تماما و:

$$\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8 \ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2 \ln 2 \end{cases}$$

(1) بيّن أنّ: $v_3 = 8$ و $v_5 = 32$

(2) أ . بيّن أنّ: $q = 2$ و $v_0 = 1$

ب. اكتب v_n بدلالة n .

ج. هل العدد 1024 حدّ من حدود المتتالية (v_n) ؟

(3) المتتالية (w_n) معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n - 3 + 2^n$

أ . تحقّق أنّ: $w_n = u_n + v_n$ ، حيث (u_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول u_0 .

ب. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = (n+1)(n-3) + 2^{n+1} - 1$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول u_0 حيث: $u_0 = 5$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7}$

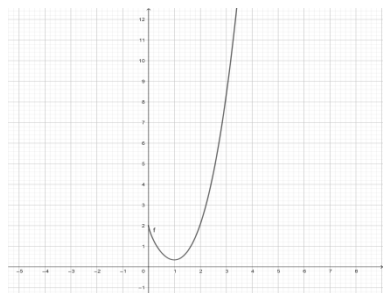
(1) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n > 3$

- (2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنّها متقاربة.
- (3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 3$
 أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.
 ب. اكتب عبارة v_n بدلالة n .
 ج. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2 \times (\frac{5}{7})^n + 3$ واحسب نهاية (u_n) .
- (4) عيّن أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها : $u_n < \frac{7}{2}$.

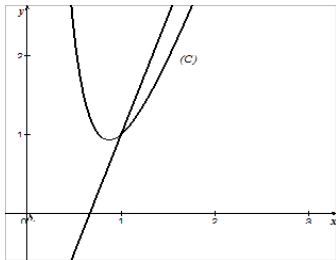
التمرين الرابع: (08 نقاط)

- (I) الجدول المقابل هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 3x^3 - 2 + 4 \ln x$
- (1) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,9 < \alpha < 1$
- (2) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0; +\infty[$.
- (II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 3x - 2 - \frac{2 \ln x}{x^2}$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (تؤخذ وحدة الطول $2cm$)
- (1) احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (يُعطى : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$)
- (2) أ . بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 3x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
 ب. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
- (3) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
 ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.
- (4) ارسم كلا من (Δ) و (C_f) . (تؤخذ $f(\alpha) \approx 0,9$)
- (5) الدالة H معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $H(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$
 أ . بيّن أنّ H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto -\frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0; +\infty[$.
 ب. احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = 1$ و $x = 2$.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموعة	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1	2×0.5	(1) خاطئة، لأنّ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq 2$
1	2×0.5	(2) خاطئة، لأنّ $f(3) < 1$
1	2×0.5	(3) صحيحة، لأنّ f متزايدة تماما على $]2; +\infty[$.
1	2×0.5	(4) صحيحة، لأنّ $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا في $]-\infty; 2[$ ولا تقبل حلا في $]2; +\infty[$
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1	0.5	(1) أ. المبلغ المستهلك في شهر جانفي هو 56000DA
	0.5	ب. المبلغ المستهلك في شهر فيفري هو 53200DA
1	0.5 0.5	(2) نجد: $u_1 = 56000$ و $u_{n+1} = \frac{19}{20}u_n$ الاستنتاج: (u_n) متتالية هندسية أساسها 0.95
1	0.25 0.75	(3) $u_n = 56000\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}$ أي $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
1	0.5	(4) أ. حساب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{12} = 56000 \frac{1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{12}}{1 - \frac{19}{20}} = 514796.7018 \text{ DA}$
	0.5	ب. المبلغ المدّخر خلال هذه السنة $12 \times 70000 - 514796.7018 = 325203.2982 \text{ DA}$
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1.5	0.75	(1) أ. إثبات بالتّراجع أنّه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < \frac{9}{2}$
	0.5	ب. $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{9}{2}\right)$ ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$
	0.25	استنتاج أن (u_n) متقاربة
1.75	0.5 0.25	(2) أ. نجد: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و $v_0 = -\frac{7}{2}$
	0.25	ب. $v_n = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$
	0.25 0.5	لدينا: $u_n = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{9}{2}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{9}{2}$
0.75	0.75	(3) $S_n = \frac{21}{2} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1 \right) + \frac{9}{2}(n+1)$

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)									
مجموعة	مجزأة										
التمرين الرابع: (08 نقاط)											
1	2×0.5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ (1 (I									
1	0.25 0.25 0.5	$g'(x) = \frac{2x^2+1}{x}$: من أجل كل x من $]0; +\infty[$ (2 الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ جدول التغيرات <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	$g'(x)$		+	$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$
x	0	$+\infty$									
$g'(x)$		+									
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$									
1	0.25 0.75	(3 لدينا: $g(1) = 0$ و بما أن g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ فإن: g سالبة تماما على المجال $]0; 1[$ وموجبة تماما على المجال $]1; +\infty[$									
1	2×0.5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$ (1 (II									
1	1	(2 $f'(x) = x^2 - 1 + \ln(x) = g(x)$									
1	0.5 0.5	(3 الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$ ومتزايدة تماما على $]1; +\infty[$ جدول تغيرات.									
1	0.25 0.75	$f(2) = \frac{2}{3} + 2 \ln 2$ (4 إنشاء (C_f) 									
1	1	(5 من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $F'(x) = f(x)$									

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموعة	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط):		
1	2×0.5	(1) الاقتراح الصحيح: (ج)، لأنّ $F'(x) = f(x)$ و $F(1) = 0$
1	2×0.5	(2) الاقتراح الصحيح: (ب)، لأنّ $\frac{F(1)-F(0)}{1-0} = -\frac{8}{9}$
1	2×0.5	(3) الاقتراح الصحيح: (أ)، لأنّ $f'(x) \geq 0$ على المجال $[3; +\infty[$
1	2×0.5	(4) الاقتراح الصحيح: (أ)، لأن $f(x) = \frac{-5}{3}$ تكافئ $x = 1$ أو $x = 5$
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1	2× 0.5	(1) بيان أنّ: $v_3 = 8$ و $v_5 = 32$
02	0.75 0.25	(2) أ . بيان أنّ: $q = 2$ و $v_0 = 1$
	0.5	ب. $v_n = 2^n$
	0.5	ج. $v_n = 1024$ يكافئ $2^n = 2^{10}$ وبالتالي $n = 10$
1	0.5	(3) أ . $w_n = u_n + v_n$ حيث: $u_n = 2n - 3$ و (u_n) حسابية أساسها 2 و $u_0 = -3$
	0.5	ب. بيان أنّ: $S_n = (n + 1)(n - 3) + 2^{n+1} - 1$
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1	0.25 0.75	(1) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n : u_n > 3$
1	0.75 0.25	(2) (u_n) متناقصة تماما (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة
	0.75 0.25	(3) أ . $v_{n+1} = \frac{5}{7} v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{7}$ و $v_0 = 2$
1.75	0.25	ب. $v_n = 2\left(\frac{5}{7}\right)^n$
	2x0.25	ج. استنتاج أنّ: $u_n = 2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$
0.25	0.25	(4) $u_n < \frac{7}{2}$ تكافئ $n > \frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln \frac{5}{7}}$ ومنه أصغر قيمة لـ n هي 5

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)							
مجموعة	مجزأة								
التمرين الرابع: (08 نقاط)									
1	0.75 0.25	(I) 1 g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0; +\infty[$ وتأخذ قيمها في $]-\infty; +\infty[$ ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0; +\infty[$ وبما أن: $0.9 < \alpha < 1$ فإن $g(0.9) \times g(1) < 0$							
0.5	0.5	(2) على المجال $]\alpha; +\infty[$: $g(x) > 0$ وعلى $]0; \alpha[$: $g(x) < 0$ و $g(\alpha) = 0$							
1	2×0.5	(II) 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$							
1	0.25	(2) أ . $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (3x - 2)) = 0$ ومنه $(\Delta): y = 3x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) .							
	0.25	ب. وضعية (C_f) بالنسبة (Δ) :							
	0.5	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x) - (3x - 2)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table> $]0; 1[$ على (C_f) فوق (Δ) $]1; +\infty[$ على (C_f) تحت (Δ) . (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; 1)$.	x	0	1	$+\infty$	$f(x) - (3x - 2)$	+	0
x	0	1	$+\infty$						
$f(x) - (3x - 2)$	+	0	-						
1.5	0.5	(3) أ . بيان أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$							
	0.5 0.5	ب. f متزايدة تماما على $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0; \alpha]$ جدول التغيرات							
1	0.25 0.75	(4) انشاء (Δ) و (C_f) . 							
2	1	(5) أ . من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $H'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$							
	1	ب. حساب المساحة: $\int_1^2 f(x) dx = 2(3 + 2\ln 2) \text{ cm}^2$							