

الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(\Delta_2): \begin{cases} x=1 \\ y=-1-t' \\ z=4+2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad (\Delta_1): \begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- (1) أ) عيّن إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .
- ب) عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستوي (P) المعين بالمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .
- (2) أ) أثبت أنّ النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي (P) .
- ب) بيّن أنّ النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) .
- (3) أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.
- ب) عيّن إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.
- (4) أ) عيّن طبيعة المثلث BCD ، ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
- ب) استنتج مساحة المثلث ACD .

التمرين الثاني: 04 نقاط

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن A نقطة لاحقها: $z_A = i$ و B لاحقها $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

- (1) ليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، نسمي C صورة B بواسطة r .
 - أ - اعط الكتابة المركبة لـ r ثم عيّن z_C - الشكل الأسّي - لاحقاً C .
 - ب - اكتب كلا من z_B و z_C على الشكل الجبري.
 - ج - علم النقط A, B و C .
- (2) لتكن D مرجح النقط A, B و C المرفقة على الترتيب بالمعاملات $2, -1$ و 2 .
 - أ - عيّن z_D لاحقاً D .
 - ب - بيّن أنّ A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.
- (3) ليكن H التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 نسمي E صورة D بالتحاكي H .
 - أ - اعط الكتابة المركبة لـ H ثم عيّن z_E لاحقاً E ، ثم علم E .
- (4) أ - احسب النسبة $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$ ، تعطى الكتابة على الشكل الأسّي.
- ب - استنتج طبيعة المثلث CDE .

التمرين الثالث: 06 نقاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
2. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
ب - ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أ - بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
ب - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+2)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.
4. أ - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.
ب - من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلاً للمعادلة $f(x) = k$.
5. ارسم (C_f) ومستقيمي المقاربين.

التمرين الرابع: 06 نقاط

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$

1. ادرس تغيرات الدالة g واحسب $g(1)$.

2. استنتج أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II - دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب - بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x$ مقارباً مائلاً له عند $+\infty$.

ج - حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ - بين أنه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحنى (C_f) ، مواز للمستقيم (D) .

ب - اكتب معادلة (Δ) .

ج - بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

د - أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f) .

هـ - ناقش بيانياً، حسب قيم العدد الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $mx - 2\ln(x) = 0$.

حل الموضوع الأول:

التمرين الأول:

(1) أ) تعيين إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} 3+2t=1 \dots\dots\dots (1) \\ -2-2t=-1-t' \dots\dots (2) \\ 1-t=4+2t' \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ من (1) نجد } t=-1 \text{ بالتعويض عن } t \text{ في (2) نجد } 0=-1-t'$$

$$\text{ومنه } t'=-1$$

بتعويض t و t' في التمثيلين الوسيطين لـ (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب نجد

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} \text{ إذن المستقيمان } (\Delta_1) \text{ و } (\Delta_2) \text{ يتقاطعان في النقطة } B(1;0;2).$$

ب) تعيين تمثيلاً وسيطياً للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

$\vec{u}(2;-2;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_1) و $\vec{v}(0;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_2) وهما أساس للمستوي (P) .
لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (P) \text{ معناه } \overrightarrow{BM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \text{ و } \overrightarrow{BM}(x-1;y;z-2)$$

ملاحظة: أخذنا نفس الوسيطين t و t'

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2t-t' \\ z=2-t+2t' \end{cases} \text{ أي } (t;t') \in \mathbb{R}^2 \text{ ومنه } \begin{cases} x-1=2t \\ y=-2t-t' \\ z-2=-t+2t' \end{cases}$$

في التمثيل الوسيطي للمستوي (P)

لأننا أخذنا نقطة التقاطع B .

(2) أ) إثبات أن النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي (P) .

$$\begin{cases} 6=1+2t \dots\dots\dots (1) \\ 4=-2t-t' \dots\dots\dots (2) \\ 4=2-t+2t' \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ نفرض أن } A \text{ تنتمي للمستوي } (P) \text{ إذن}$$

$$\begin{cases} t=\frac{5}{2} \\ t'=1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} t=\frac{5}{2} \\ 4=5-t' \\ 4=-\frac{1}{2}+2t' \end{cases} \text{ من (1) نجد } t=\frac{5}{2} \text{ بالتعويض في (2) و (3) نجد}$$

إذن A لا تنتمي للمستوي (P) .

ب) تبين أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) .

تكون B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) إذا وفقط إذا كان:

$$B \in (P) \text{ و } \overrightarrow{BA} \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P)$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \vec{v} = 5 \times 0 + 4(-1) + 2(2) = 0 \text{ و } \overrightarrow{BA} \cdot \vec{u} = 5 \times 2 + 4(-2) + 2(-1) = 0 \text{ لدينا } \overrightarrow{BA}(5;4;2)$$

وهذا يعني أن $\overrightarrow{BA} \perp \vec{u}$ و $\overrightarrow{BA} \perp \vec{v}$ بالتالي $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) وبما أن $B \in (P)$ فإن B هي

المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) .

(3) أ) تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

معادلة المستوي (Q) من الشكل $5x + y - 7z + d = 0$ وبما أن $A \in (Q)$ فإن $5(6) + 4 - 7(4) + d = 0$ ومنه $d = -6$ وعليه معادلة المستوي (Q) هي $5x + y - 7z - 6 = 0$.

ب) تعيين إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.

تعيين إحداثيات C نقطة تقاطع (Q) مع (Δ_1) .

$$\text{نحل الجملة} \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \\ 5x + y - 7z - 6 = 0 \end{cases} \text{ وعليه } 5(3+2t) - 2 - 2t - 7(1-t) - 6 = 0 \text{ ومنه } 35t = 0 \text{ أي } t = 0$$

إذن $C(3; -2; 1)$.

تعيين إحداثيات D نقطة تقاطع (Q) مع (Δ_2) .

$$\text{نحل الجملة} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t' \\ z = 4 + 2t' \\ 5x + y - 7z - 6 = 0 \end{cases} \text{ وعليه } 5 - 1 - t' - 7(4 + 2t') - 6 = 0 \text{ ومنه } -15t' - 30 = 0 \text{ أي } t' = -2$$

إذن $D(1; 1; 0)$.

(4) أ) تعيين طبيعة المثلث BCD .

$$BC = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3 \text{ ومنه } \overrightarrow{BC}(2; -2; -1)$$

$$BD = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \text{ ومنه } \overrightarrow{BD}(0; 1; -2)$$

$$CD = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} \text{ ومنه } \overrightarrow{CD}(-2; 3; -1)$$

ومنه $BC^2 + BD^2 = CD^2$ إذن المثلث BCD قائم في B .

طريقة 2: لدينا $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 - 2(-1) - 1(2) = 0$ وهذا يعني أن $\vec{u} \perp \vec{v}$ ومنه المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) متعامدان

ومتقاطعان في النقطة B وبما أن $C \in (\Delta_1)$ و $D \in (\Delta_2)$ فإن المثلث BCD قائم في B .

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

تذكر: حجم رباعي الوجوه يعطى كما يلي $\frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \times AB \quad (AB \text{ هي المسافة بين } A \text{ والمستوي } (BCD) = (P))$$

$$\text{لدينا } AB = 3\sqrt{5} \text{ ، } S_{BCD} = \frac{BC \times BD}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} ua$$

$$\text{وعليه } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{5}}{2} \times 3\sqrt{5} = \frac{15}{2} uv$$

ب) استنتاج مساحة المثلث ACD .

$$\text{لدينا } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ACD} \times d(B; (Q)) \text{ لأن } (ACD) = (Q)$$

$$d(B; (Q)) = \frac{|5-14-6|}{5\sqrt{3}} = \frac{15}{5\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ ولدينا } S_{ACD} = \frac{3V_{ABCD}}{d(B; (Q))} \text{ ومنه}$$

$$S_{ACD} = \frac{3V_{ABCD}}{d(B; (Q))} = \frac{3 \times \frac{15}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ ua} \text{ وعليه}$$

التمرين الثاني:

لتكن A نقطة لاحقتها: $z_A = i$ و B لاحقتها $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

(1) ليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، نسمي C صورة B بواسطة r .

أ - اعطاء الكتابة المركبة لـ r

لتكن M و M' نقطتان من المستوي لاحقتهما z و z' على الترتيب

$$r(M) = M' \text{ معناه } (z - z_0) = e^{i\frac{2\pi}{3}} (z' - z_0) \text{ أي } z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z \text{ .}$$

تعيين z_C - الشكل الأسّي - لاحقة C .

$$r(B) = C \text{ يكافئ } z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_B \text{ أي } z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{ وعليه } z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ .}$$

ب - كتابة كلا من z_C و z_B على الشكل الجبري.

$$z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \text{ أي } z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \text{ أي } z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

ج - انشاء النقط A, B, C .

(2) لتكن D مرجح النقط A, B, C المرفقة على الترتيب بالمعاملات 2، -1 و 2.

أ - تعيين z_D لاحقة D

$$z_D = \frac{2z_A - z_B + 2z_C}{2-1+2} = \frac{2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i}{3} \text{ وعليه } z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ب - تبين أن A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة.

إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 وهذا يعني أن $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 1$ بالتالي $OA = OB = OC = OD = 1$ أي الدائرة المثلثية.

(3) ليكن H التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 نسمي E صورة D بالتحاكي H .

الكتابة المركبة لـ H .

$$\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM} \text{ معناه } z' - z_A = 2(z - z_A) \text{ وعليه } z' = 2z - z_A \text{ أي } z' = 2z - i \text{ : } H$$

تعيين z_E لاحقة E .

$$H(D) = E \text{ يكافئ } z_E = 2z_D - i \text{ ومنه } z_E = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i \text{ أي } z_E = \sqrt{3}$$

4) أ - حساب النسبة $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$.

$$\begin{aligned}\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{2i}{\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{2i}{\sqrt{3} + i} = \frac{2i(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ وعليه}$$

ب - استنتاج طبيعة المثلث CDE.

$$\text{لدينا } \frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ وهذا يعني أن } CD = CE \text{ و } (\overline{CE}; \overline{CD}) = \frac{\pi}{3}$$

المثلث CDE متساوي الساقين وإحدى زواياه $\frac{\pi}{3}$ بالتالي المثلث CDE متقايس الأضلاع

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب $f(x) + f(-x)$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + f(-x) = x + \frac{2}{e^x + 1} - x + \frac{2}{e^{-x} + 1} = \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} = \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = 2$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا $f(x) + f(-x) = 2$ معناه $f(-x) = 2 - f(x)$ أي

$$f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x) \text{ إذن النقطة } \omega(0; 1) \text{ هي مركز تناظر للمنحنى } (C_f).$$

2. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2}{e^x + 1} = +\infty$$

ب - استنتاج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

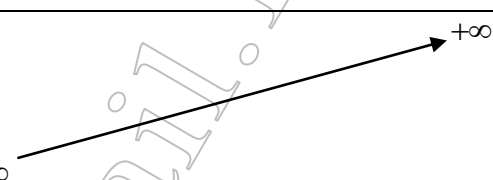
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 - f(-x)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [2 - f(t)] = -\infty \text{ ومنه } f(x) = 2 - f(-x)$$

ب - دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} \text{ لدينا من أجل كل عدد حقيقي } x, e^{2x} + 1 > 0 \text{ و } (e^x + 1)^2 > 0$$

إن $f'(x) > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

3. أ - تبين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$$

إن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} - 2 = 2 - 2 = 0$$

تفسير النتيجة بيانياً.

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = 0$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x + 2$ بجوار $-\infty$.

4. أ - تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.

لدينا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[-1,7; -1,6]$ و $f(-1,7) \approx -0,008$ و $f(-1,6) \approx -0,064$

أي $f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[-1,7; -1,6]$

بحيث $f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ فإن α وحيد.

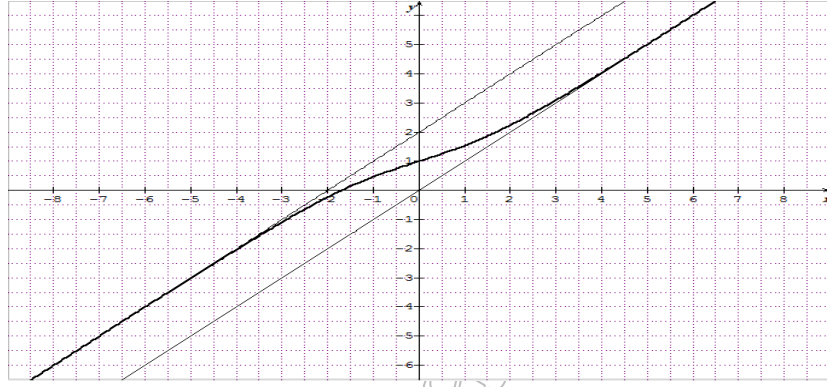
ب - من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلاً للمعادلة $f(x) = k$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) + f(-x) = 2$ وخاصة $f(\alpha) + f(-\alpha) = 2$ ومنه $f(-\alpha) = 2 - f(\alpha)$ لأن

$$f(\alpha) = 0$$

إن العدد $(-\alpha)$ هو حل للمعادلة $f(x) = 2$ وعليه $k = 2$.

5. رسم (C_f) ومستقيمه المقاربين.



التمرين الرابع:

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$

1. دراسة تغيرات الدالة g

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2\ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 2 = 2$ عندئذ $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 2 - 2\ln x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x + \frac{2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

لدينا $x > 0$ ومنه إشارة $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$ هي من نفس إشارة $x^2 - 1$

x	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	-	0	+

$$g(1) = 1 + 2 + 2\ln 1 = 3$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

2. استنتاج أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

للدالة g قيمة حدية صغرى على المجال $]0; +\infty[$ وهي $g(1) = 3$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$$g(x) \geq 3, \quad]0; +\infty[\text{ وبالتالي } g(x) > 0.$$

II - دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$ فيكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2\ln x}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{2 \ln x}{x} = -\infty \text{ فيكون } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{x} = -\infty \text{ لدينا}$$

ب - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0 \text{ إذن المنحنى } (C_f) \text{ له مستقيم مقارب مائل } (\Delta) \text{ معادلته } y = x \text{ في جوار } +\infty$$

ج - تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

$$\text{لدينا } f(x) - x = \frac{2 \ln x}{x} \text{ ومنه إشارة } f(x) - x \text{ هي من نفس إشارة } \ln x.$$

$$f(x) - x = 0 \text{ يكافئ } \ln x = 0 \text{ أي } x = 1$$

$$f(x) - x > 0 \text{ يكافئ } \ln x > 0 \text{ ويكافئ } x > 1$$

$$f(x) - x < 0 \text{ يكافئ } \ln x < 0 \text{ ويكافئ } 0 < x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		0	+
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)
		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	

$$2. \text{ أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال }]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + 2 \left[\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \right] = 1 + \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[: g(x) > 0$ و $x^2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. أ - تبين أنه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) ، مواز للمستقيم (Δ) .

$$(T) \text{ يوازي } (\Delta) \text{ يعني } f'(x_0) = 1$$

$$\frac{g(x_0)}{x_0^2} = 1 \text{ يكافئ } x_0^2 + 2 - 2 \ln x_0 = x_0^2 \text{ ويكافئ } \ln x_0 = 1 \text{ أي } x_0 = e$$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة التي إحداثياتها $\left(e; e + \frac{2}{e}\right)$.

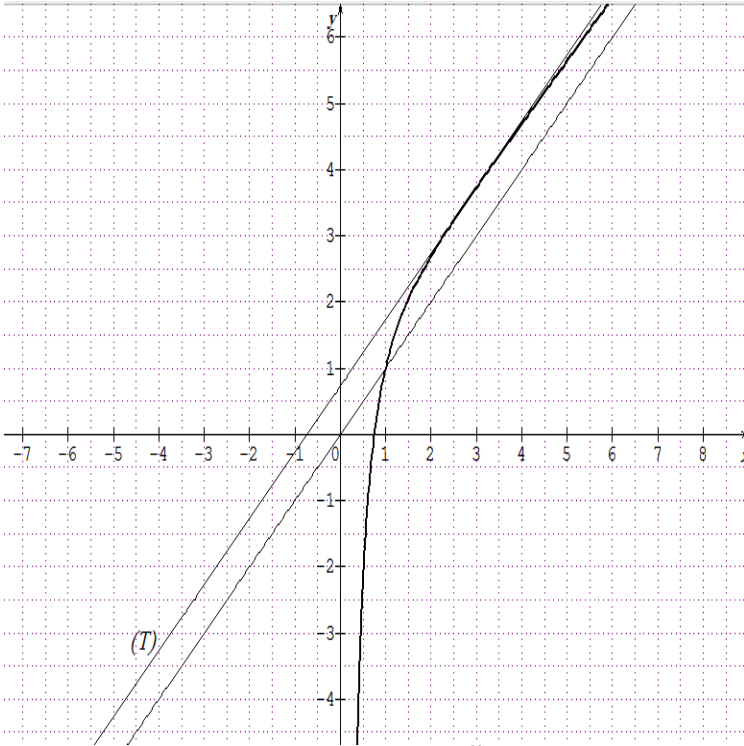
ب - كتابة معادلة (Δ) .

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \text{ ومنه } y = (x - e) + e + \frac{2}{e} \text{ أي } y = x + \frac{2}{e}.$$

ج - تبين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

لدينا الدالة f مستمرة على المجال $]0; +\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,5;1]$ و $f(0,5) \approx -2,27$ ، $f(1) = 1$ أي $f(0,5) \times f(1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]0,5;1[$ بحيث $f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ فإن α وحيد أي (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0,5 < \alpha < 1$

د - رسم المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) .



هـ - المناقشة بيانيا، حسب قيم العدد الحقيقي m

عدد حلول المعادلة : $mx - 2\ln(x) = 0$.

$$mx - 2\ln(x) = 0 \text{ تكافئ } mx = 2\ln(x)$$

$$\text{وتكافئ } m = \frac{2\ln(x)}{x} \text{ وتكافئ}$$

$$f(x) = x + m \text{ أي } x + m = x + \frac{2\ln(x)}{x}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل النقاط المشتركة بين

$$(C_f) \text{ والمستقيم ذي المعادلة } y = x + m$$

بقراءة بيانية:

إذا كان $m \leq 0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا.

إذا كان $0 < m < \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m = \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m > \frac{2}{e}$ فإن المعادلة لا تقبل أي حل.