

إختبار بكالوريا تجريبي للثالثة علوم تجريبية

من إعداد : خالرجناخشة

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن):

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي :

(1) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $1 + \ln(2e) + \ln(3e) + \dots + \ln(en) = n + \ln(n!)$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x} = 1$.

(3) المعادلة $8^x - 4^x - 2^x = 0$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$.

(4) إذا كانت الأعداد a, b, c حقيقية موجبة تماما وكان $\ln a, \ln b, \ln c$ وبهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية

وكان e^a, e^b, e^c وبهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن : $a = b = c$.

التمرين الثاني (4ن):

يحتوي كيس U_1 على ثلاث كرات بيضاء وكرتين سوداوين ، و يحتوي كيس U_2 على كرتين سوداوين و كرة بيضاء .
(كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

الجزء (I) و (II) مستقلان .

(I) نقترح التجربة العشوائية التالية :

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1 ونضعها في الكيس U_2 ، ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_2 ونضعها في الكيس U_1 .

نعتبر الأحداث التالية :

B_1 : " الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء ."

B_2 : " الكرة المسحوبة من الكيس U_2 بيضاء ."

(1) أ- بين أن : $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}$.

ب- أنقل وأكمل شجرة الاحتمالات .

ج- أحسب $P(B_2)$.

د- علما أن الكرة المسحوبة من الكيس U_2 بيضاء .

ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء ؟

(2) أحسب احتمال الحدث : E : " عند نهاية التجربة بقي توزيع الكرات في الكيسين كما هو ."

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات السوداء المتبقية في الكيس U_2 عند نهاية التجربة .

أحسب $P(X=2)$.

(II) نسحب الكرات من الكيس U_1 الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء ثم نوقف التجربة .

ليكن Y المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة .

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(Y)$.

التمرين الثالث (4ن):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n}{3+u_n}$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$ ،
بـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2+u_n}$.
أـ أثبت أن المتتالية (v_n) ثابتة .

بـ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2}{5 \times 3^n - 1}$.
جـ - أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$ و $P_n = (u_0 + 3) \times (u_1 + 3) \times (u_2 + 3) \times \dots \times (u_n + 3)$.
أحسب S_n و P_n بدلالة n .

التمرين الرابع (8ن):

(I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x + e^x$.
(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) أـ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $-0.57 < \alpha < -0.56$.
بـ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - xe^{1-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أـ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
بـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(3) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{1-x} g(x-1)$ ،
بـ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(4) بين أن : $f(\alpha+1) = \alpha + 2 + \frac{1}{\alpha}$ ، ثم أعط حصرًا لـ $f(\alpha+1)$.

(5) بين أن للمنحنى (C_f) نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها .

(6) أـ حل $\mathbb{R}$ في كلا من المعادلتين : $f(x) = 0$ و $f'(x) = 1$. ثم فسر بيانيا النتائج المحصل عليها .
بـ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

(7) أحسب $f(-1)$ ، ثم أنشئ كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) . (نأخذ : $f(\alpha+1) \approx -0.4$)

(8) عيّن بيانيا قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون للمعادلة $e^{m-1+x} = x$ حلين متميزين .

(9) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = |x| - |xe^{1-x}|$. (C_h) تمثيلها البياني .

إشرح كيفية إنشاء المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) ، ثم أنشئه .

(III) λ عدد حقيقي موجب تماما .

(1) باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{1-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0 .

(2) أـ أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = \lambda$ و $y = x$.

بـ تحقق أن : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = e$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن):

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي :

(1) حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2022y = 0$ هي الدوال من الشكل : $x \mapsto Ce^{2022x}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} = 0$

(3) القيمة المتوسطة للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $[1; 2]$ هي : $\frac{1 - \ln 2}{2}$.

(4) الجملة $\begin{cases} e^{x-y} - e^{x+y} = 2 \\ \ln(x-y) - \ln(x+y) = \ln 2 \end{cases}$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}^2$.

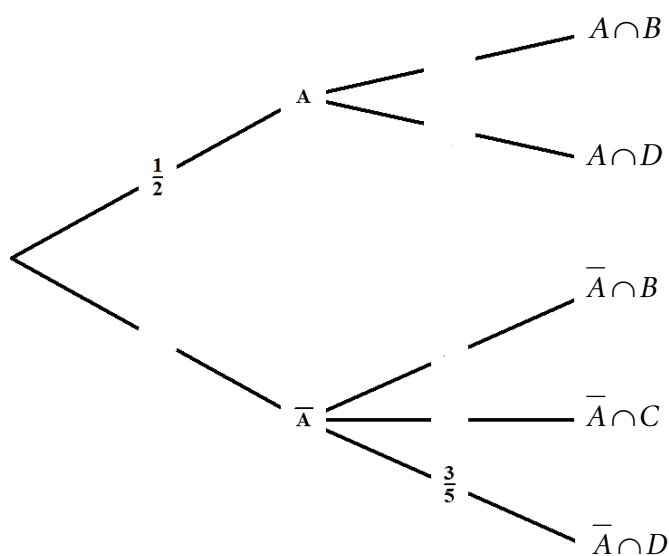
التمرين الثاني (4ن):

يحتوي كيس U_1 على كرتين بيضاوين و كرتين سوداوين . و يحتوي كيس U_2 على ثلاث كرات بيضاء وكرة سوداء .
(كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

نفترض التجربة العشوائية التالية :

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1 .

- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء ، نرجعها إلى الكيس و نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس U_2 .
- إذا كانت الكرة المسحوبة سوداء ، نضعها في الكيس U_2 و نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس U_2 .



نعتبر الأحداث التالية :

- A : "الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء ."
- B : " سحب كرتين بيضاوين من الكيس U_2 ."
- C : " سحب كرتين سوداوين من الكيس U_2 ."
- D : " سحب كرتين مختلفتين في اللون من الكيس U_2 ."

(1) أنقل وأكمل شجرة الاحتمالات التالية :

(2) أحسب $P(B)$ و $P(D)$.

(3) بين أن احتمال ألا تبقى كرة سوداء في الكيس U_2 هو $\frac{3}{10}$.

(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات السوداء المتبقية في الكيس U_2 .
أ- حدد القيم الممكنة لـ X .

ب- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج- ما احتمال أن يبقى على الأقل كرة سوداء واحدة في الكيس U_2 ؟

التمرين الثالث (4ن):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{2 + u_n}$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 < u_n \leq 4$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_n - 2)$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$.

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$ و $P_n = (u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times (u_2 + 2) \times \dots \times (u_n + 2)$.

أحسب S_n و P_n بدلالة n .

التمرين الرابع (8ن):

f الدالة العددية المعرفة على $] -\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. ثم فسر النتيجةين بيانياً .

(2) أ- بين أنه من أجل كل x من $] -\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{x^2 - x + 2}{2x(x-1)}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{x}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) بين أن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $1.72 < \alpha < 1.73$ و $-1.20 < \beta < -1.21$.

(6) أنشئ كلاماً من (Δ) و (C_f) .

(7) عدد حقيقي a .

أ- بين أن الدالة : $x \mapsto (x-a) \ln(x-a) - x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln(x-a)$ على المجال $]a; +\infty[$.

ب- استنتج دالة أصلية للدالة $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.

ج- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = \frac{x}{2}$ ، $x = 2$ و $x = 3$.

(8) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $w_n = f(n)$ و $A_n = w_2 + w_3 + \dots + w_n$.

بين أن : $A_n = \frac{(n-1)(n+2)}{4} - \ln n$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح للتمرين الأول:

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير :

(1) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $1 + \ln(2e) + \ln(3e) + \dots + \ln(en) = n + \ln(n!)$ صحيح .
التبرير :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$1 + \ln(2e) + \ln(3e) + \dots + \ln(en) = 1 + \ln 2 + \ln(e) + \ln 3 + \ln(e) + \dots + \ln n + \ln(e) \\ = (1 + 1 + \dots + 1) + \ln(2 \times 3 \times \dots \times n) = n + \ln(n!)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x} = 1 \text{ خطأ .}$$

التبرير :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1-x)(1+x)]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(1-x)}{-x} \right] = 1 - 1 = 0$$

$$(3) \text{ المعادلة } 8^x - 4^x - 2^x = 0 \text{ لا تقبل حلول في } \mathbb{R} \text{ خطأ .}$$

التبرير :

$$8^x - 4^x - 2^x = 0 \text{ تكافئ } 2^{2x} - 2^x - 1 = 0 \text{ تكافئ } 2^x (2^{2x} - 2^x - 1) = 0 \text{ تكافئ } Y^2 - Y - 1 = 0$$

$$\text{تكافئ } x = \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln 2} \text{ تكافئ } 2^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ تكافئ } \begin{cases} Y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ Y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

(4) إذا كانت الأعداد a, b, c حقيقية موجبة تماماً و كان $\ln a, \ln b, \ln c$ وبهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية

وكان e^a, e^b, e^c وبهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن : $a = b = c$ صحيح .

التبرير :

$\ln a, \ln b, \ln c$ وبهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية معناه $2 \ln b = \ln a + \ln c$ أي : (1) $b^2 = ac$

e^a, e^b, e^c وبهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية معناه $(e^b)^2 = e^a \times e^c = e^{a+c}$ أي : (2) $2b = a + c$

$$\text{من (1) و (2) نجد } ac = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \text{ أي } \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = 0 \text{ أي } a - c = 0 \text{ أي } a = c \text{ . إذن : } a = b = c .$$

حل مقترح للتمرين الثاني:

يحتوي كيس U_1 على ثلاث كرات بيضاء و كرتين سوداوين ، و يحتوي كيس U_2 على كرتين سوداوين و كرة بيضاء .

(كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

الجزء (I) و (II) مستقلان .

(I) نقترح التجربة العشوائية التالية :

نسحب عشوائياً كرة واحدة من الكيس U_1 ونضعها في الكيس U_2 ، ثم نسحب عشوائياً كرة واحدة من الكيس U_2 ونضعها

في الكيس U_1 .

نعتبر الأحداث التالية :

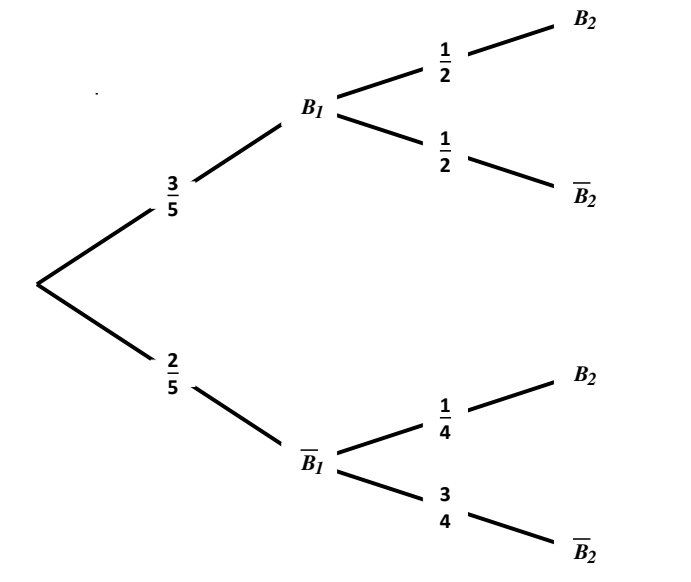
B_1 : "الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء ."

B_2 : "الكرة المسحوبة من الكيس U_2 بيضاء ."

$$(1) \text{ أ- تبيان أن : } P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} .$$

جـ- حساب $P(B_2)$.
 $P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ومنه U_1 بيضاء من الكيس المسحوبة من الكيس U_2 علما أن الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء .

ب- شجرة الاحتمالات :



جـ- حساب $P(B_2)$.

$$P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(\bar{B}_1 \cap B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

د- علما أن الكرة المسحوبة من الكيس U_2 بيضاء . ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء ؟

$$P_{B_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4}$$

(2) حساب احتمال الحدث E : "عند نهاية التجربة بقي توزيع الكرات في الكيسين كما هو".

$$P(E) = P(B_1 \cap B_2) + P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات السوداء المتبقية في الكيس U_2 عند نهاية التجربة .

$$P(X = 2) = P(E) = \frac{3}{5}$$

(II) نسحب الكرات من الكيس U_1 الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء ثم نوقف التجربة .
 ليكن Y المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة .

قيم Y هي : $\{1; 2; 3\}$.

$$\text{لدينا : } p(Y = 3) = \frac{A_2^2 \times A_3^1}{A_5^3} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \text{ و } p(Y = 2) = \frac{A_2^1 \times A_3^1}{A_5^2} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, \text{ } p(Y = 1) = \frac{3}{5}$$

Y_i	1	2	3
$P(Y = Y_i)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\text{الأمل الرياضي: } E(Y) = 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{13}{10}$$

حل مقترح للتمرين الثالث:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n}{3+u_n}$.

(1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$ ".

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = \frac{1}{2}$ ومنه $0 < u_0 < 1$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0 < u_n < 1$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} < 1$.

لدينا حسب الفرض $0 < u_n < 1$ ومنه : $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n}{3+u_n} - 1 = \frac{-3}{3+u_n} < 0$ و $u_{n+1} - 0 = \frac{u_n}{3+u_n} > 0$

ومنه $0 < u_{n+1} < 1$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3+u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 - 2u_n}{3+u_n} = \frac{-u_n(u_n + 2)}{3+u_n}$

ولدينا : $0 < u_n < 1$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة.

(2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2+u_n}$

أ- إثبات أن المتتالية (v_n) ثابتة.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2+u_{n+1}} = \frac{3^{n+1} u_n}{2 + \frac{u_n}{3+u_n}} = \frac{3^{n+1} u_n}{6+3u_n} = \frac{3^{n+1} u_n}{3(2+u_n)} = \frac{3^n u_n}{2+u_n} = v_n$

ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2}{5 \times 3^n - 1}$

لدينا : المتتالية (v_n) ثابتة ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 = \frac{u_0}{2+u_0} = \frac{1}{5}$

ولدينا : $v_n = \frac{3^n u_n}{2+u_n}$ ومنه $2v_n + v_n u_n = 3^n u_n$ ومنه $2v_n = u_n(3^n - v_n)$ أي $u_n = \frac{2v_n}{3^n - v_n} = \frac{\frac{2}{5}}{3^n - \frac{1}{5}} = \frac{2}{5 \times 3^n - 1}$

ج- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{5 \times 3^n - 1} = 0$

(3) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$ و $P_n = (u_0 + 3) \times (u_1 + 3) \times (u_2 + 3) \times \dots \times (u_n + 3)$

حساب P_n و S_n بدلالة n .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{u_n} = \frac{5 \times 3^n - 1}{2} = \frac{5}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$

ومنه $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{5}{2} \left(\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} \right) - \frac{1}{2} (n+1) = \frac{5}{4} (3^{n+1} - 1) - \frac{1}{2} (n+1) = \frac{5}{4} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2} n - \frac{7}{4}$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n + 3 = \frac{u_n}{u_{n+1}}$ ومنه

$$P_n = (u_0 + 3) \times (u_1 + 3) \times (u_2 + 3) \times \dots \times (u_n + 3) = \frac{u_0}{u_1} \times \frac{u_1}{u_2} \times \frac{u_2}{u_3} \times \dots \times \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_0}{u_{n+1}} = 5 \times 3^{n+1} - 1$$

حل مقترح للتمرين الرابع:

(I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x + e^x$.

(1) دراسة إتجاه تغير الدالة g .

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = 1 + e^x$.

لدينا : $g'(x) > 0$ من أجل كل x ، وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

(2) أ- تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $-0.57 < \alpha < -0.56$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-0.57) \approx -0.004 \\ g(-0.56) \approx 0.01 \end{cases}$ أي $g(-0.57) \times g(-0.56) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $-0.57 < \alpha < -0.56$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - xe^{1-x}$.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 - e^{1-x}) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - xe^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x}{e^x} \right) = +\infty$$

(2) أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-xe^{1-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{e^x} \right) = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل

للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

لدينا : $f(x) - x = -xe^{1-x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

• من أجل $x \in]-\infty; 0]$ ، المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

• من أجل $x \in [0; +\infty[$ ، المنحنى (C_f) يقع أسفل المستقيم (Δ) .

• المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $O(0; 0)$.

(3) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 1 - e^{1-x} + xe^{1-x} = e^{1-x}(e^{x-1} + x - 1) = e^{1-x}g(x-1)$.

ب- استنتاج إتجاه تغير الدالة f :

لدينا : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x-1)$ وبالتالي :

• $g(x-1) \geq 0$ من أجل $x-1 \geq \alpha$ أي $x \geq \alpha+1$ ومنه الدالة f متزايدة على المجال $[\alpha+1; +\infty[$.

• $g(x-1) \leq 0$ من أجل $x-1 \leq \alpha$ أي $x \leq \alpha+1$ ومنه الدالة f متناقصة على المجال $] -\infty; \alpha+1]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$\alpha+1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha+1)$	$+\infty$

(4) تبيان أن : $f(\alpha+1) = \alpha + 2 + \frac{1}{\alpha}$.

لدينا : $g(\alpha) = 0$ ومنه $e^\alpha = -\alpha$ أي $e^{-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$ وبالتالي : $f(\alpha+1) = \alpha + 1 - (\alpha+1)e^{-\alpha} = \alpha + 2 + \frac{1}{\alpha}$.

حصر $f(\alpha+1)$:

$$\text{لدينا } -0.57 < \alpha < -0.56 \text{ ومنه } \begin{cases} 1.43 < \alpha + 2 < 1.44 \\ -\frac{1}{0.56} < \frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{0.57} \end{cases} \text{ أي : } 1.43 - \frac{1}{0.56} < \alpha + 2 + \frac{1}{\alpha} < 1.44 - \frac{1}{0.57}$$

$$\text{أي : } -0.35 < f(\alpha+1) < -0.31$$

(5) تبين أن للمنحنى (C_f) نقطة إنعطاف :

$$\text{الدالة } f' \text{ قابلة للإشتقاق على } \mathbb{R} \text{ و } f''(x) = e^{1-x} + e^{1-x} - xe^{1-x} = 2e^{1-x} - xe^{1-x} = (2-x)e^{1-x}$$

إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2-x)$ وبالتالي النقطة $\Omega(2; 2-2e^{-1})$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

(6) أ- حل $\mathbb{R}$ في كلا من المعادلتين : $f'(x) = 1$ و $f(x) = 0$.

$$\text{لدينا } f(x) = 0 \text{ تكافئ } x(1 - e^{1-x}) = 0 \text{ تكافئ } \begin{cases} x = 0 \\ e^{1-x} = 1 \end{cases} \text{ أو تكافئ } \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{لدينا } f'(x) = 1 \text{ تكافئ } 1 - e^{1-x} + xe^{1-x} = 1 \text{ تكافئ } (x-1)e^{1-x} = 0 \text{ تكافئ } x = 1$$

تفسير النتائج المحصل عليها بيانيا :

حلول المعادلة $f(x) = 0$ ، بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل ومنه المنحنى (C_f) يقطع حامل

محور الفواصل في النقطتين $O(0;0)$ و $A(1;0)$.

حلول المعادلة $f'(x) = 1$ ، بيانيا هي فواصل النقط من المنحنى (C_f) والتي يكون فيها المماس معامل توجيهه 1 وبما أنه

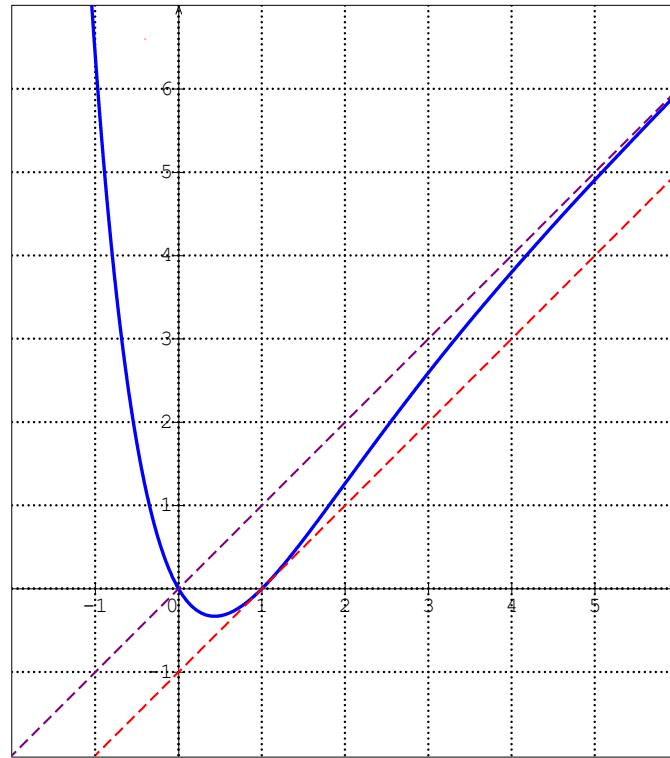
للمعادلة $f'(x) = 1$ حل وحيد فإن للمنحنى (C_f) مماس وحيد في النقطة A معامل توجيهه 1 أي أنه مماس موازي للمستقيم (Δ) .

ب- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$$\text{لدينا : } (T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ ومنه } (T) : y = x - 1$$

$$(7) \quad f(-1) = -1 + e^2 \approx 6.38$$

الرسم :



(8) تعيين ، بيانيا ، قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون للمعادلة $e^{m-1+x} = x$ حلان متميزان.

$$e^{m-1+x} = x \text{ تكافئ } e^m = xe^{1-x} \text{ تكافئ } x - e^m = x - xe^{1-x} \text{ تكافئ } f(x) = x - e^m$$

ومنه حلول المعادلة $e^{m-1+x} = x$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x - e^m$.

يكون للمعادلة $e^{m-1+x} = x$ حلان متميزان إذا كان $0 < e^m < 1$ أي $m \in]-\infty; 0[$.

$$(9) \quad \text{الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي : } h(x) = |x| - |xe^{1-x}| = |x|(1 - e^{1-x}) = \begin{cases} x(1 - e^{1-x}) & ; x \geq 0 \\ -x + xe^{1-x} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_h) اعتماداً على المنحنى (C_f) :

المنحنى (C_h) منطبق على المنحنى (C_f) من أجل $x \in [0; +\infty[$ ، ونظيره بالنسبة لحامل محاور الفواصل من أجل $x \in]-\infty; 0]$.
(III) λ عدد حقيقي موجب تماماً .

(1) تعيين دالة أصلية للدالة xe^{1-x} على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0 .

$$\int_0^x te^{1-t} dt = \left[-te^{1-t} \right]_0^x - \int_0^x -e^{1-t} dt = \left[-te^{1-t} \right]_0^x - \left[e^{1-t} \right]_0^x = \left[(-t-1)e^{1-t} \right]_0^x = (-x-1)e^{1-x} + e$$

(2) أ- حساب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = 0$ ، $x = \lambda$ ، و $y = x$.

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda (x - f(x)) dx = \int_0^\lambda xe^{1-x} dx = (-\lambda - 1)e^{1-\lambda} + e$$

ب- التحقق أن : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = e$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (-\lambda - 1)e^{1-\lambda} = 0 \text{ ، لأن } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[(-\lambda - 1)e^{1-\lambda} + e \right] = e$$

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح للتمرين الأول :

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير :

(1) حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2022y = 0$ هي الدوال من الشكل $x \mapsto Ce^{2022x}$ خطأ .
التبرير :

حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2022y = 0$ هي الدوال من الشكل $x \mapsto Ce^{\frac{1}{2022}x}$ صحيح .
التبرير :

مع $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$ ، $f(x) = e^{x^2}$ و $f'(x) = 2xe^{x^2}$.

(3) القيمة المتوسطة للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $[1; 2]$ هي : $\frac{1 - \ln 2}{2}$ صحيح .
التبرير :

$$M = \frac{1}{2-1} \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln 2}{2} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

(4) الجملة $\begin{cases} e^{x-y} - e^{x+y} = 2 \\ \ln(x-y) - \ln(x+y) = \ln 2 \end{cases}$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}^2$ خطأ .
التبرير :

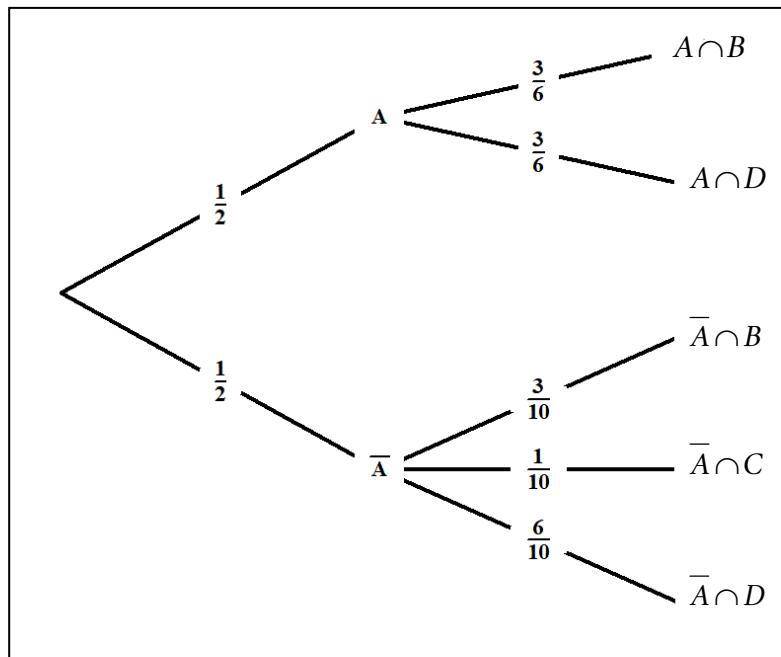
$$\begin{cases} e^{x-y} - e^{x+y} = 2 \\ x = -3y \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} e^{x-y} - e^{x+y} = 2 \\ \frac{x-y}{x+y} = 2 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} e^{x-y} - e^{x+y} = 2 \\ \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \ln 2 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} e^{x-y} - e^{x+y} = 2 \\ \ln(x-y) - \ln(x+y) = \ln 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{-2y} = -1 \\ e^{-2y} = 2 \end{cases} \text{ تكافئ أو } \begin{cases} Z = -1 \\ Z = 2 \end{cases} \text{ تكافئ أو } Z^2 - Z - 2 = 0 \text{ تكافئ } e^{-4y} - e^{-2y} - 2 = 0$$

$$\text{تكافئ } y = -\frac{\ln 2}{2} \text{ ومنه حل الجملة هو الثنائية } \left(\frac{3 \ln 2}{2}; -\frac{\ln 2}{2} \right)$$

حل مقترح للتمرين الثاني:

(1) شجرة الاحتمالات :



(2) حساب $P(B)$ و $P(D)$.

$$\text{لدينا: } P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \quad P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{4} + \frac{6}{20} = \frac{11}{20}$$

(3) تبين أن احتمال ألا تبقى كرة سوداء في الكيس U_2 هو $\frac{3}{10}$.

$$\text{لدينا: } \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات السوداء المتبقية في الكيس U_2 .

أ- القيم الممكنة لـ X هي: $\{0; 1; 2\}$.

ب- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

$$\text{لدينا: } P(X=0) = \frac{3}{10}, P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{4} + \frac{6}{20} = \frac{11}{20}, P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

X_i	0	1	2
$P(X = X_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{3}{20}$

ج- ما احتمال أن يبقى على الأقل كرة سوداء واحدة في الكيس U_2 ؟

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{11}{20} + \frac{3}{20} = \frac{14}{20}$$

حل مقترح للتمرين الثالث:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{2+u_n}$.

(1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $2 < u_n \leq 4$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n , $2 < u_n \leq 4$ ".

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$, لدينا $u_0 = 4$ ومنه $2 < u_0 \leq 4$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $2 < u_n \leq 4$, ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2 < u_{n+1} \leq 4$.

لدينا حسب الفرض $2 < u_n \leq 4$ ومنه:

$$u_{n+1} - 2 = \frac{4u_n}{2+u_n} - 2 = \frac{2u_n - 4}{2+u_n} = \frac{2(u_n - 2)}{2+u_n} > 0 \quad \text{و} \quad u_{n+1} - 4 = \frac{4u_n}{2+u_n} - 4 = \frac{-8}{2+u_n} < 0$$

ومنه $2 < u_{n+1} \leq 4$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n , $2 < u_n \leq 4$.

ب- تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

$$\text{لدينا: من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{2+u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n}{2+u_n} = \frac{u_n(2-u_n)}{2+u_n}$$

ولدينا: $2 < u_n \leq 4$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة.

(2) نضع، من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_n - 2)$.

أ- إثبات أن (v_n) متتالية حسابية:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_{n+1} - 2) = \ln\left(\frac{4u_n}{2+u_n}\right) - \ln\left(\frac{2u_n - 4}{2+u_n}\right) = \ln(4u_n) - \ln(2u_n - 4) = \ln 2 + v_n$$

ومن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\ln 2$ وحدها الأول v_0 .

ب- كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = \ln 2 + n \ln 2 = (n+1) \ln 2, n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$u_n = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} : n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$\frac{u_n}{u_n - 2} = e^{v_n} \text{ ومنه } v_n = \ln \left(\frac{u_n}{u_n - 2} \right) \text{ ومنه } v_n = \ln(u_n) - \ln(u_n - 2), n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$u_n = \frac{2e^{(n+1)\ln 2}}{e^{(n+1)\ln 2} - 1} = \frac{2 \times 2^{n+1}}{2^{n+1} - 1} = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} : \text{ إذن } u_n = \frac{2e^{v_n}}{e^{v_n} - 1} \text{ أي } 2e^{v_n} = u_n(e^{v_n} - 1) \text{ أي } u_n = e^{v_n}u_n - 2e^{v_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} = 0 : \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} \right) = 2 \text{ ج-}$$

$$(3) \text{ نضع، من أجل كل عدد طبيعي } n : S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \text{ و } P_n = (u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times (u_2 + 2) \times \dots \times (u_n + 2)$$

حساب P_n و S_n بدلالة n .

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}, n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2}(n+1) - \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2}(n+1) - 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \right) = \frac{1}{2}n - \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \text{ ومنه}$$

$$\text{لدينا : من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n + 2 = \frac{4u_n}{u_{n+1}} \text{ ومنه}$$

$$P_n = (u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times (u_2 + 2) \times \dots \times (u_n + 2) = \frac{4u_0}{u_1} \times \frac{4u_1}{u_2} \times \frac{4u_2}{u_3} \times \dots \times \frac{4u_n}{u_{n+1}} = \frac{4^{(1+2+\dots+n)} u_0}{u_{n+1}}$$

$$= 4^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \right) = 2^{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \right)$$

حل مقترح للتمرين الرابع:

$$f \text{ الدالة العددية المعرفة على }]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[: \text{ كما يلي } f(x) = \frac{x}{2} + \ln \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

التفسير : المستقيمان اللذان معادلتهما $x=0$ و $x=1$ مقاربان للمنحنى (C_f) .

$$(2) \text{ أ- تبين أنه من أجل كل } x \text{ من }]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[: \text{ فإن } f'(x) = \frac{x^2 - x + 2}{2x(x-1)}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ و :

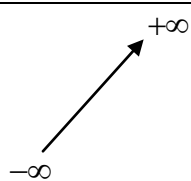
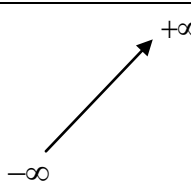
$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)+2}{2x(x-1)} = \frac{x^2-x+2}{2x(x-1)}$$

ب- إتجاه تغير الدالة f :
إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
x^2-x+2	+				
$x-1$	-		0	+	
x	-	0	+		
$x(x-1)$	+	0	-	0	+

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

$$(3) \text{ أ- لدينا : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{x}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

إشارة الفرق من إشارة $\ln \left(\frac{x-1}{x} \right) = \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right)$ وإشارة $\ln \left(\frac{x-1}{x} \right)$ من إشارة $-x$ ومنه :

• من أجل $x \in]-\infty; 0[$ ، المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

• من أجل $x \in]1; +\infty[$ ، المنحنى (C_f) يقع أسفل المستقيم (Δ) .

(4) تبين أن النقطة $\Omega \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

من أجل كل $x \in D$ ، $(1-x) \in D$ و

$$f(1-x) + f(x) = \frac{1-x}{2} + \ln \left(\frac{-x}{1-x} \right) + \frac{x}{2} + \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) = \frac{1}{2} + \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) + \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) = \frac{1}{2} - \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) + \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

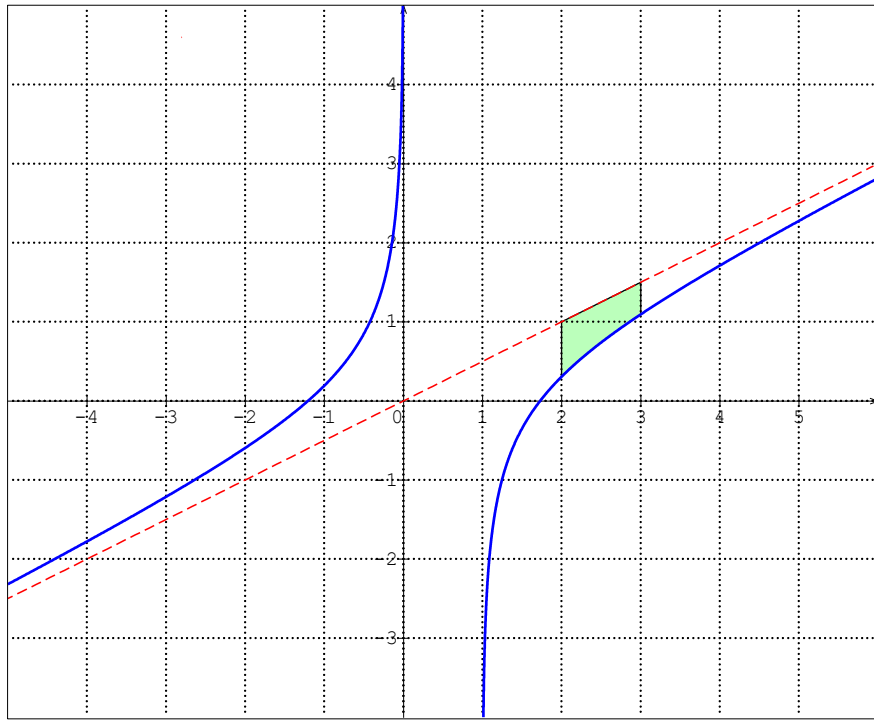
(5) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $1.72 < \alpha < 1.73$ و $-1.21 < \beta < -1.20$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$ و $]1.72; 1.73[\subset]1; +\infty[$ و $f(1.72) \approx -0.01$
 $f(1.73) \approx 0.002$

أي $f(1.72) \times f(1.73) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1; +\infty[$ حلا وحيدا α حيث : $1.72 < \alpha < 1.73$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و $]-\infty; 0[\subset]-\infty; 0[$ و $f(-1.21) \approx -0.01$
 $f(-1.20) \approx 0.002$

أي $f(-1.21) \times f(-1.20) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; 0[$ حلا وحيدا β حيث : $-1.21 < \beta < -1.20$.

(7) a عدد حقيقي .أ- تبيان أن الدالة : $x \mapsto (x-a) \ln(x-a) - x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln(x-a)$ على المجال $]a; +\infty[$.لدينا : من أجل كل $x \in]a; +\infty[$ ، $\left[(x-a) \ln(x-a) - x \right]' = \ln(x-a) + \frac{1}{x-a} \times (x-a) - 1 = \ln(x-a)$ ،ب- استنتاج دالة أصلية للدالة $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.لدينا : من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ ، $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \ln(x-1) - \ln x$ ، ومنه دالة أصلية للدالة $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.من الشكل : $x \mapsto [(x-1) \ln(x-1) - x \ln x]$ ج- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = \frac{x}{2}$ و $x = 3$.

$$S = \int_2^3 \left[\frac{x}{2} - f(x) \right] dx = \int_2^3 -\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) dx = [x \ln x - (x-1) \ln(x-1)]_2^3 = 3 \ln 3 - 4 \ln 2 = \ln\left(\frac{27}{16}\right)$$

(8) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $w_n = f(n)$ و $A_n = w_2 + w_3 + \dots + w_n$.تبيان أن : $A_n = \frac{(n-1)(n+2)}{4} - \ln n$.لدينا : أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ،

$$\begin{aligned} A_n &= w_2 + w_3 + \dots + w_n = \frac{2}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \frac{n}{2} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2}\right) + \ln\left(\frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-1)}{2 \times 3 \times \dots \times n}\right) \\ &= \frac{n-1}{2} \left(1 + \frac{n}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(n-1)(n+2)}{4} - \ln n \end{aligned}$$

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2022

لا تنسونا بصلح دعائكم

نشر يوم 16.05.2022