

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ : 0، 1، 2 و سبع كريات حمراء مرقمة بـ : 0، 1، 1، 2، 2، 2 كل الكريات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق

(1) احسب احتمال الحوادث الآتية

"A الكريات المسحوبة تحمل أرقام زوجية "

"B الحصول على كرية بيضاء واحدة على الأقل "

"C الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها زوجي "

(2) بين أن $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$ هل الحدثين A و B مستقلين ؟

(3) علما أن الكريات المسحوبة تحمل أرقام زوجية ما احتمال ان تكون منها واحدة على الأقل بيضاء .

(4) نعتبر المتغير العشوائي X المرتبط بعدد الكرات المتحصل عليها التي تحمل أرقام زوجية .

• عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

• احسب $P(e^X - e \geq 0)$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z + 1 - \sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A، B، C و D لاحقاتها على

الترتيب : $z_A = -1 + \sqrt{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -1 + \sqrt{3}$ $z_D = iz_C$

1. اكتب z_A على شكل أسي .

2. بين أن $z_B - z_C = i(z_A - z_C)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. بين أن النقط C ، D و A على استقامة واحدة .

4. عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون $\left(\frac{\sqrt{6}}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيلي صرف .

5. بين أن العدد المركب Z حيث $Z = \left(\frac{z_A}{2}\right)^{2024} + \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1445}$ حقيقي .

6. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z والتي تحقق :

$$\text{Arg}(z_B - z) - \text{Arg}(z_A - z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = \ln 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \ln \left(\frac{1+e^{u_n}}{2} \right)$$

- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.
 ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = \frac{1-e^{u_n}}{2}$.
 ج) استنتج أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{e^{u_n} - 1}$.

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ يطلب تعيين حددها الأول.

ب. عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \ln(e^{u_0} - 1) + \ln(e^{u_1} - 1) + \ln(e^{u_2} - 1) + \dots + \ln(e^{u_n} - 1)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 + 2 \ln x$

- 1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 2) بين أن للمعادلة: $g(x) = 0$ حل وحيد α وأن $0,52 < \alpha < 0,53$.
 3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = -x + \frac{3+2\ln x}{x}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$

1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ت) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- ث) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
 ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم المقارب (Δ) .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ ثم استنتج حصراً لـ $f(\alpha)$

4) بين أن (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة له.

5) أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) (نضع $f(0,22) = f(2,11) = 0$)

6) m وسيط حقيقي . ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $3 + 2 \ln x - mx = 0$

7) احسب العدد الحقيقي I حيث $I = \int_{e^{-1}}^e \frac{3+2\ln x}{x} dx$ ، فسر النتيجة.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي الصندوق U على أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات سوداء و الصندوق V على ثلاث كريات بيضاء و كرة واحدة سوداء كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس .

نعمت طريقة السحب التالية نسحب كرية واحدة من الصندوق U

إذا كانت بيضاء نضعها في الصندوق V و نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق V

إذا كانت سوداء نضعها في الصندوق V و نسحب كرتين بالتتابع دون إرجاع من الصندوق V

(1) شكل شجرة احتمالات توضح فيها التجربة

(2) احسب احتمال الحوادث الآتية :

A "الكرية المسحوبة من الصندوق U سوداء "

B "الكرتين المسحوبتين من الصندوق V لها نفس اللون "

(3) علما أن الكرتين المسحوبتين من الصندوق V لها نفس اللون ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من الصندوق U سوداء

(4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بعدد الكريات سوداء المسحوبة من الصندوق V

(5) عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :

1. شكل أسّي للعدد z حيث : $z = \frac{2-2i}{1+\sqrt{3}}$ هو $z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

2. عمدة العدد المركب : $Z = 2i (\sin \theta - i \cos \theta)$ هي : $\text{Arg}(Z) = -\theta + 2k\pi$

3. مجموعة النقط M من المتوي ذات اللاحقة z التي تحقق $2i\bar{z} = 2 + (3+i\sqrt{3})e^{i\theta}$ هي :

دائرة مركزها A لاحتقها $z_A = -i$ ونصف قطرها $r = \sqrt{3}$

4. من أجل كل العدد الطبيعي n فردي $(\sqrt{3}-i)^{3n}$ تخيلي صرف

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = \alpha$ (حيث α عدد حقيقي) و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 - \frac{4}{u_n + 3}$

(أ) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

(2) في كل ماياتي نفرض أن $u_0 = 0$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 1$

(ب) بين أن (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(1 - u_n)$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$\bullet \text{ بين أن } n+1 - \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \leq S_n < n+1$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 + xe^{1-x}$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-0,28 < \alpha < -0,27$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{3}x^2e^{2-2x} + \frac{2}{3}xe^{1-x}$.

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$

(1 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فسر النتيجة هندسيا .

(2 أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2}{3}g'(x) \cdot g(x)$

(ب) بين أن الدالة f متناقصة على المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $[1; +\infty[$ و متزايدة على المجال $[1; \alpha]$.

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(ح) بين أن $f(\alpha) = -\frac{1}{3}$

(3) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين احدهما المبدأ O و الأخرى فاصلتها β حيث $-0,8 < \alpha < -0,7$.

(4) أرسم المنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

(5) H الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $H(x) = -\frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)e^{2-2x}$

(أ) بين أن الدالة H أصلية للدالة $h \mapsto x^2e^{2-2x}$ على $\mathbb{R}$.

(ب) باستعمال الكاملة بالتجزئة بين أن $\int_0^1 xe^{1-x} dx = e - 2$.

(ت) احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الثاني

التوفيق في امتحان شهادة البكالوريا