



مستوى : ثلاثة متوسط (3 م 1, 2, 3 - فوج 01 -)

المدة الممنوحة : 90 دقيقة

الفرض المندروس للفصل الثاني في مادة الرياضيات.

السنة الدراسية : 2020-2021

تاريخ اجتياز الفرض : 04 ماي 2021

- ◀ ملاحظتان مهمتان ! • يُسمح باستعمال الآلة الحاسبة العلمية غير المبرمجة.
• يكتب بخط واضح ومقروء على ورقة التحرير اسم ونسب المترشح (ة) بالحروف العربية.

التمرين الأول : (08 نقاط)

■ عزيزي النجيب، تأمل قليلاً في المعادلة $(\mathcal{E}_t)$ المعرفة على الصيغة التالية :

$$3t - 4 = -2t + 26 \quad (\mathcal{E}_t)$$

. حسب معلوماتك السابقة، حل المعادلة $(\mathcal{E}_t)$ ، مع توضيح طريقة حلك بالتفصيل.■ يرمز x إلى عدد صحيح.

. نعتزم إثبات أن :

$$(3x - 4)(2x + 3) = (3x - 2)(x + 6) + 3x(x - 5) \quad (\mathcal{E}_x)$$

1. أنشر وبسط العبارة $\mathcal{A} = (3x - 4)(2x + 3)$.2. أنشر وبسط العبارة $\mathcal{B} = (3x - 2)(x + 6) + 3x(x - 5)$.3. أحسب قيمة العبارة $\mathcal{A}$ من أجل $x = -1$ ، مرة باستعمال العبارة الأصلية ومرة أخرى باستعمال العبارة المبسطة.
. ماذا تلاحظ؟4. تحقق من أن ناتجي $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ متساويان.

التمرين الثاني : (08 نقاط)

■ ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث :

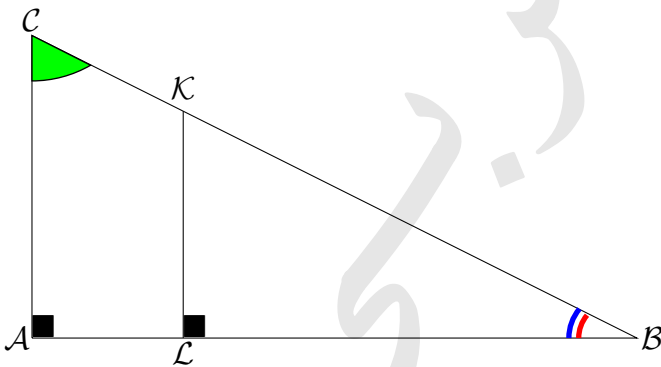
$$AB = 12\text{cm}, AC = 3\text{cm} \text{ و } AC = 2\text{cm}$$

تأمل الرسم المقابل (الرسم غير مرسوم بالأطوال الحقيقية)، ثم
أجب على الأسئلة الموالية :1. أحسب طول الضلع $[LK]$.2. أحسب قيمة مقربة إلى الجزء من المائة لطول الضلع $[BC]$.3. أحسب قيمة مقربة إلى الجزء من المائة لقياس الزاوية $\hat{B}$.4. بطريقتين مختلفتين، أعط قيمة مقربة إلى 0,01 لقياس الزاوية $\hat{C}$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

■ عُمر أب هو 64 سنة و عُمر ابنه 18 سنة.

. بعد كم سنة يصبح عُمر الأب ثلاث أمثال عُمر ابنه؟



التمرين الرابع : (05 نقاط إضافية)

~ تنبيه!!! على الممتحن أن يعالج مشكلا واحدا فقط ~

◀ المشكل الأول :

□ ليكن ABC مثلثاً قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .

1. إذا علمت أن $BC = BH + HC$. أثبت العلاقة التالية، $BC^2 = (BH^2 + HC^2 + 2BH \times HC)$.

2. برهن صحة المساويتين التاليتين : $BH^2 = AB^2 - AH^2$ و $CH^2 = AC^2 - AH^2$.

3. حسب ما سبق، استنتج المساواة الموالية : $AH^2 = HB \times HC$.

◀ المشكل الثاني :

□ لدينا قطعتي مستقيم $[OE]$ و $[OF]$ طولهما على التوالي α و β حيث : α و β عددين طبيعيين غير معدومين.

. اقترح طريقة رياضية لرسم قطعة مستقيم طولها $\sqrt{\alpha\beta}$.

◀ المشكل الثالث :

□ ABC مثلث قائم الزاوية في A ، سنشير بالرمز التالي S_{ABC} إلى مساحة المثلث ABC .

1. أثبت صحة العلاقة التالية : $S_{ABC} < \frac{BC^2}{4}$.

2. متى تحدث المساواة؟ (أقصد صحة العلاقة : $S_{ABC} = \frac{BC^2}{4}$).

◀ المشكل الرابع :

□ في متجر لبيع باقات الزهور، تم في الصباح بيع $\frac{2}{3}$ من مجموع الباقات المتوفرة، ثم بيعت بعد الزوال $\frac{1}{2}$ من ما تبقى.

□ إذا علمت أن 337 باقات لم تبع.

. أوجد العدد الأصلي للباقات.

◀ المشكل الخامس :

□ خصص معمل أدوية 12 عبوة لتعبئة إنتاجها من أقراص معالجة مرض السكري.

قالت العاملة :

" . جربت تعبئة الأقراص في 10 عبوات، فزاد 15 قرصاً.

. ملأ جميع العبوات ينقص 35 قرصاً".

1. أصحح أن سعة العبوة هي 20 قرصاً؟ 30 قرصاً؟.

□ يرمز x إلى سعة العبوة الواحدة.

2. عبر بطريقتين مختلفتين عن عدد الأقراص التي أنتجها المعمل.

3. أكتب المعادلة التي تعبر عن مضمون نص المسألة ثم حلها.

4. ما سعة كل عبوة من العبوات المخصصة لتلك الأقراص؟.

5. ما عدد الأقراص التي أنتجها المعمل.

التصحيح التفصيلي للفرض المدروس للفصل الثاني مادة الرياضيات.

حل التمرين الأول : (08 نقاط)

حل المعادلة ($\mathcal{E}_t$) بالتفصيل :

قبل أن نتطرق في حل هذا السؤال، نذكر بكيفية حل معادلة من الدرجة الأولى وبمجهول واحد.
لهذا الغرض، نتبع المراحل التالية :

- . نقل كل الحدود التي تشمل المجهول t في الطرف الأيسر للمعادلة.
- . نقل كل الحدود التي لا تتضمن المجهول t في الطرف الأيمن للمعادلة.
- . حساب قيمة المجهول t .

لدينا : $3t - 4 = -2t + 26$ بإضافة $2t$ إلى طرفي المعادلة ($\mathcal{E}_t$) فتحصل على ما يلي : $\underbrace{3t + 2t}_{=5t} - 4 = \underbrace{-2t + 2t}_{=0} + 26$

وهذا ما يكافئ العلاقة : $5t - 4 = +26$ ولنضيف $+4$ لطرفي العلاقة الأخيرة، فنجد : $\underbrace{5t - 4 + 4}_{=0} = \underbrace{+26 + 4}_{=30}$

وعليه : $5t = 30$ أي : $\frac{5t}{5} = \frac{30}{5}$ وأخيراً نتحصل على أن : $t = 6$.

1. نشر وتبسيط العبارة $\mathcal{A} = (3x - 4)(2x + 3)$:

- . نشر ونبسط الجداءات ثم نبسط المجموع الجبري.
- . نرتب عبارة المجموع حسب قوى x تنازلياً.

$$\mathcal{A} = (3x - 4)(2x + 3)$$

$$\mathcal{A} = 3x(2x + 3) - 4(2x + 3)$$

$$\mathcal{A} = 3x \times 2x + 3x \times 3 - 4 \times 2x - 4 \times 3$$

$$\mathcal{A} = 6x^2 + \underbrace{9x - 8x}_{(9-8)x=x} - 12$$

$$\mathcal{A} = 6x^2 + x - 12$$

2. نشر وتبسيط العبارة $\mathcal{B} = (3x - 2)(x + 6) + 3x(x - 5)$:

نطبق الخاصية التوزيعية ونبسط الجداءات ثم نبسط المجهول الجبري.

$$\mathcal{B} = 3x(x + 6) - 2(x + 6) + 3x(x - 5)$$

$$\mathcal{B} = 3x \times x + 3x \times 6 - 2x - 2 \times 6 + 3x \times x - 3x \times 5$$

$$\mathcal{B} = 3x^2 + 18x - 2x - 12 + 3x^2 - 15x$$

$$\mathcal{B} = (3 + 3)x^2 + (18 - 2 - 15)x - 12$$

$$\mathcal{B} = 6x^2 + x - 12$$

3. حساب قيمة العبارة $\mathcal{A}$ وهذا من أجل $x = -1$:

. باستعمال العبارة الأصلية :

نعوض x بالعدد -1 في العلاقة $\mathcal{A} = (3x - 4)(2x + 3)$ ، فنجد :

$$\mathcal{A} = (3 \times (-1) - 4)(2 \times (-1) + 3) = -7 \times 1 = -7$$

• باستعمال العبارة المبسطة :

نعوض x بالعدد -1 في العلاقة $6x^2 + x - 12$ فنجد : $6(-1)^2 - 1 - 12 = 6 - 1 - 12 = -7$
نلاحظ أنّ من أجل $x = -1$ فإنّ للعبارتين نفس القيمة، ومنه أن يكونا متساويين.

4. التحقق من أنّ ناتجي A و B متساويان :

حسب ما فات، لدينا : $A = 6x^2 + x - 12$ و $B = 6x^2 + x - 12$ من هذا يُمكن الحكم على أنّ : $A = B$.

حل التمرين الثاني : (08 نقاط)

1. حساب طول الضلع $[LK]$

ABC مثلث فيه، $L \in (AB)$ و $K \in (BC)$ و $(LK) \parallel (AC)$.

إذن حسب نظرية طاليس :

$$\frac{BL}{BA} = \frac{BK}{BC} = \frac{LK}{AC}$$

بالتعويض : $\frac{10}{12} = \frac{LK}{3}$ ومنه نجد أنّ : $LK = \frac{10 \times 3}{12} = 2,5 \text{ cm}$ إذن $LK = 2,5 \text{ cm}$.

2. حساب الطول BC :

بما أنّ ABC مثلث قائم في A ، حسب خاصية فيثاغورس، نجد :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 12^2 + 3^2$$

$$BC^2 = 144 + 9$$

$$BC^2 = 153$$

$$\sqrt{BC^2} = BC = \sqrt{153}$$

$$BC \simeq 12,37$$

إذن : $BC = \sqrt{153} \simeq 12,37 \text{ cm}$.

3. حساب قياس الزاوية $\hat{B}$:

بما أنّ المثلث ABC قائم في A ، ونعلم أيضاً : جيب تمام زاوية حادة = طول الضلع المجاور لهذه الزاوية ÷ طول الوتر.
بمعنى آخر :

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{12}{\sqrt{153}}$$

$$\cos \hat{B} = 0,9701425$$

باستعمال الآلة الحاسبة (عزيزي الحاذق تأكد بأن الآلة الحاسبة الخاصة بك على الوضع DEG).

الآن، نجد : $B \simeq 14,04^\circ$.

4. بطريقتين مختلفتين، حساب قياس الزاوية $\hat{C}$:

◀ طريقة أولى :

تذكير مهم : سبق لك أن لاحظت أنّ : " مجموع أقياس الزوايا الداخلية لمثلث هو 180° ".

وعليه : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وبالتالي : $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$.

حسب ما فات، نجد أنّ : $\widehat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 14,04^\circ = 75,96^\circ$. وأخيراً ... نجد : $\widehat{C} = 75,96^\circ$.

◀ طريقة ثانية :

بما أنّ المثلث ABC قائم الزاوية في A ، وعليه :

$$\begin{aligned}\cos \widehat{C} &= \frac{AC}{BC} \\ \cos \widehat{C} &= \frac{3}{\sqrt{153}} \\ \cos \widehat{C} &\simeq 0,242535625\end{aligned}$$

باستعمال الآلة الحاسبة، نجد القيمة التقريبية للزاوية $\widehat{C}$. إذن : $\widehat{C} = 75,96^\circ$.

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

نفرض أن عدد السنوات هو x يصبح عُمر الأب $x + 64$ وعُمر ابنه $x + 18$ ، بعد ترجمة معطيات نص التمرين، فنتحصل المعادلة الموالية :

$$x + 64 = 3(x + 18)$$

$$x + 64 = 3x + 54$$

$$64 - 54 = 3x - x$$

$$10 = 2x$$

$$\frac{10}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$5 = x$$

عدد السنوات هو : 5.

حل التمرين الرابع : (05 نقاط إضافية)

◀ حل المشكل الأول :

1. إثبات العلاقة $BC^2 = (BH^2 + HC^2 + 2BH \times HC)$:

عملاً بمعطيات نص المشكل الأول، نجد أنّ : $BC = BH + HC$. بالتربيع طرفي العلاقة السابقة، فنتحصل

على $BC^2 = (BH + HC)^2$ وهذا ما يعني أنّ : $BC^2 = BH^2 + 2BH \times HC + HC^2$.

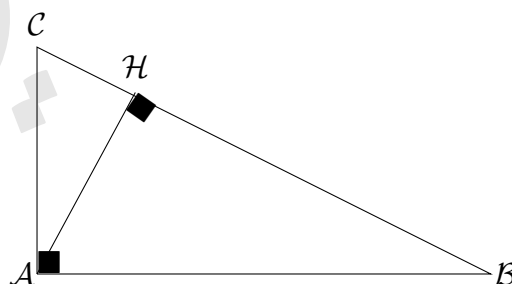
2. برهان صحة المساويتين $BH^2 = AB^2 - AH^2$ و $CH^2 = AC^2 - AH^2$:

يتضح من معطيات نص المشكل، أنّ AHB مثلث قائم الزاوية في H . من هذا يمكننا أن نطبق خاصية فيثاغورس المباشرة

على المثلث AHB . إذن : $AB^2 = AH^2 + HB^2$ ومنه : $HB^2 = AB^2 - AH^2$.

بما أنّ AHC مثلث قائم الزاوية في H . من هذا يمكننا أن نطبق خاصية فيثاغورس المباشرة على المثلث AHC .

إذن : $AC^2 = AH^2 + HC^2$ ومنه : $HC^2 = AC^2 - AH^2$.



3. استنتاج المساواة $AH^2 = HB \times HC$:

حسب ما سبق، لدينا العلاقات التالية

$$BC^2 = BH^2 + 2BH \times HC + HC^2 \text{ و } HB^2 = AB^2 - AH^2 \text{ و } HC^2 = AC^2 - AH^2 \text{ ومنه :}$$

$$BC^2 = BH^2 + 2BH \times HC + HC^2$$

$$BC^2 = (AB^2 - AH^2) + 2BH \times HC + (AC^2 - AH^2)$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH^2 + 2HB \times HC$$

ولو تأملنا قليلاً -ولدي الحبيب- في المثلث ABC فنجد أنه مثلث قائم في A (من المعطيات) وبعد تطبيق خاصية فيثاغورس

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ عليه : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH^2 + 2HB \times HC$$

$$\text{وهذا ما يلزم أن يكون : } 2AH^2 = 2HB \times HC \text{ وبعبارة أجمل وأروع : } AH^2 = HB \times HC.$$

◀ حل المشكل الثاني :

1. اقتراح طريقة رياضية لإنشاء قطعة مستقيم طولها $\sqrt{\alpha\beta}$:

نعتبر ثلاث نقاط B ، C و H على استقامة واحدة، بحيث : $HB = \alpha$ و $HC = \beta$.

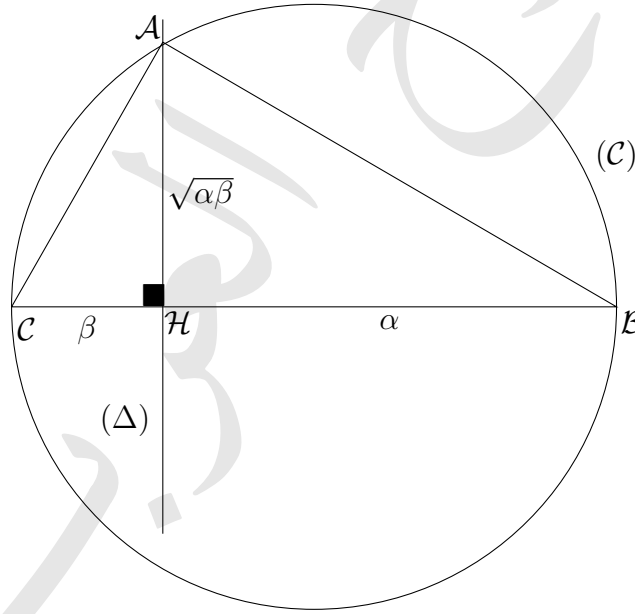
(C) الدائرة التي قطرها $[BC]$ و (Δ) المستقيم العمودي على (BC) في النقطة H .

لتكن A إحدى نقطتي تقاطع (Δ) و (C).

النقطة A تنتمي إلى الدائرة (C) التي قطرها $[BC]$ والتالي فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

لدينا (Δ) عمودي على (BC) في النقطة H وهذا يوحي أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

وحسب المشكل الأول نجد أن $AH^2 = HB \times HC$ وهذا ما يعني : $AH^2 = \alpha\beta$ عليه : $AH = \sqrt{\alpha\beta}$.



◀ حل المشكل الثالث :

1. إثبات صحة العلاقة $S_{ABC} < \frac{BC^2}{4}$:

تذكير مهم : مساحة المثلث = (القاعدة × الارتفاع) ÷ 2.

من خلال التذكير السابق، نجد أن $S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$ (تذكر -عزيزي الشطور- أن ABC مثلث قائم في A). إذن :

$$2S_{ABC} = AB \times AC \quad (1)$$

هذا من ناحية أولى، ومن ناحية ثانية، لدينا : ABC مثلث قائم الزاوية في A إذن حسب خاصية فيثاغورس المباشرة، لدينا العلاقة المولية $BC^2 = AB^2 + AC^2$ وعليه : $BC^2 - 2AB \times AC = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC$.
أي : $BC^2 - 2AB \times AC = (AB - AC)^2 > 0$ إذن : $BC^2 - 2AB \times AC > 0$ وهذا يكفي العبارة (2) حيث :

$$BC^2 > 2AB \times AC \quad (2)$$

نستنتج من خلال العبارتين (1) و (2) ما يلي : $BC^2 > 2 \times 2S_{ABC}$ أي : $BC^2 > 4S_{ABC}$.

وأخيراً نجد العبارة المرجوة $S_{ABC} < \frac{BC^2}{4}$.

2. متى تحدث المساواة $S_{ABC} = \frac{BC^2}{4}$ ؟ :

تحدث المساواة إذا تحقق الشرط التالي $AB = AC$ وهذا يعني أن ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A .

◀ حل المشكل الرابع :

لتريض مشكل يتطلب منا بالمرور على المراحل التالية :

- اختيار المجهول، وليكن على سبيل الحظ! α .
- ترجمة كل المعطيات الواردة في النص بدلالة α .
- إيجاد معادلة مناسبة تعبر عن المشكل المطروح علينا.
- حل المعادلة المستخرجة.
- التصريح بالحل.
- التحقق من صحة النتيجة بالعودة إلى نص المشكل.

. إيجاد العدد الأصلي للباقات :

ليكن α : هو العدد الأصلي للباقات.

$\frac{2}{3}\alpha$: عدد الباقات التي بيعت في الفترة الصباحية.

$\frac{1}{3}\alpha$: عدد الباقات المتبقية من الفترة الصباحية.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{6}\alpha$: عدد الباقات التي بيعت بعد الزوال.

337 : عدد الباقات التي لم تبع.

□ صياغة المعادلة :

$$\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{6}\alpha + 337 = \alpha$$

□ حل المعادلة :

لدينا : $\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{6}\alpha + 337 = \alpha$ نقوم بتوحيد المقامات للكسرين $\frac{2}{3}\alpha$ و $\frac{1}{6}\alpha$ إذن : $\frac{4}{6}\alpha + \frac{1}{6}\alpha + 337 = \alpha$

ومنع : $337 = \alpha - \frac{5}{6}\alpha$ وبالتالي : $337 = \frac{6-5}{6}\alpha = \frac{1}{6}\alpha$

إذن : $\alpha = 2022$. العدد الأصلي للباقات هو : 2022 باقة.

◀ حل المشكل الخامس :

1. أصحح أنّ سعة العبوة هي 20 قرصاً؟ 30 قرصاً؟ :

. لنفترض أنّ سعة العبوة 20 قرصاً.

◀ في الحالة الأولى عدد الأقراص هي : $20 \times 10 + 15 = 215$ قرصاً.◀ في الحالة الثانية عدد الأقراص هي : $20 \times 12 - 35 = 205$ قرصاً.

عدد الأقراص يختلف في الحالتين، وهذا ما يعني أنّ عدد الأقراص ليس 20 قرصاً.

■ بأسلوب مماثل لنثبت أنّ عدد الأقراص ليس 30 قرصاً.

. لنفترض أنّ سعة العبوة 30 قرصاً.

◀ في الحالة الأولى عدد الأقراص هي : $30 \times 10 + 15 = 315$ قرصاً.◀ في الحالة الثانية عدد الأقراص هي : $30 \times 12 - 35 = 325$ قرصاً.

عدد الأقراص يختلف في الحالتين، وهذا ما يعني أنّ عدد الأقراص ليس 30 قرصاً.

2. التعبير بطريقتين مختلفتين عن عدد الأقراص التي أنتجها المعمل :

. طريقة أولى : $10x + 15$. طريقة ثانية : $12x - 35$. (حيث x : سعة العبوة الواحدة).

3. كتابة المعادلة التي تعبر عن مضمون نص المسألة، وحلها :

تظهر جلياً المعادلة التي تعبر عن مضمون نص المشكل $10x + 15 = 12x - 35$.

حل المعادلة السابقة :

$$10x + 15 = 12x - 35$$

$$10x - 12x = -35 - 15$$

$$(10 - 12)x = -(35 + 15)$$

$$-2x = -50$$

$$x = 25$$

4. سعة كل عبوة من العبوات المخصصة لتلك الأقراص :

سعة كل عبوة من العبوات المخصصة لتلك الأقراص : 25 قرصاً.

5. عدد الأقراص التي أنتجها المعمل :

عدد الأقراص التي أنتجها المعمل : $25 \times 10 + 15 = 265$ قرصاً.

"انتهى حل هذا الفرض -بفضل الله تعالى-، ويلها التطبيقات الإضافية وهي جميلة جداً سنتركها للقارئ الحلو والحلول

ستكون في صفحتنا عبر الفيسبوك -إن شاء الله-."

وفقنا الله وإياكم