

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5 نقاط)

يحتوي كيس على n كرة سوداء ($n \geq 2$) وثلاث كرات بيضاء، لا نفرق بينها عند اللمس .
(1) نسحب من الكيس عشوائيا كرتين في أن واحد .

(أ) أحسب احتمال الحوادث التالية " A الكرتين المسحوبتين من اللون الأبيض "
" B سحب على الأقل كرة واحدة بيضاء " ، " C الكرتين المسحوبتين مختلفتي اللون "

(ب) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث $P(C) = \frac{15}{28}$

(2) نعتبر $n = 5$ ونسحب من الكيس كرتين على التوالي وبدون إرجاع . نفرض أنه عند سحب كرة بيضاء نحصل على (-10) نقطة وعند سحب كرة سوداء نحصل على $(+5)$ نقطة .
نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها.
(أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X
(ب) عين الأمل الرياضي للمتغير X . ماذا تستنتج ؟

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $(\bar{Z} - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4) = 0$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$..

نعتبر النقط A, B, C و E لواحقها على الترتيب :

$$Z_A = 1 - i, \quad Z_B = 1 + i\sqrt{3}, \quad Z_C = \bar{Z}_B, \quad \text{و} \quad Z_E = 4 \times \frac{1 - i}{1 - i\sqrt{3}}$$

(1) (أ) أكتب كل من الأعداد Z_A, Z_B و Z_C على الشكل الأسّي .

(ب) بين أن العدد $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{1962}$ عدد حقيقي .

(2) (أ) أكتب العدد المركب Z_E على الشكل الجبري و الشكل المثلثي

(ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

(3) (أ) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1); (B,2); (C,-1)\}$

(ب) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z بحيث $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 4$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

$$\begin{cases} \ln U_5 - \ln U_3 = 6 \\ \ln U_2 + \ln U_4 = 14 \end{cases} : (U_n) \text{ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما بحيث}$$

(1) أ) بين أن أساس المتتالية (U_n) هو $q = e^3$ وحدها الأول $U_0 = e^{-2}$

ب) أكتب U_n بدلالة n .

(2) نضع : $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$

أحسب بدلالة n الجداء P_n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

(3) نضع $V_n = \ln U_{n+1} + \ln U_n$

أ) برهن أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول V_0 .

ب) أحسب بدلالة n المجموع $S_n = \ln U_0 + \ln U_1 + \dots + \ln U_n$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $D =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانياً .

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة D : $f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$

ب) أستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) أكتب معادلة الماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

(5) الدالة المعرفة على المجال $]1, +\infty[$ بالعلاقة $g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

أ) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1, +\infty[$: $\frac{x+1}{x} > 1$

ب) أستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1, +\infty[$

(6) ليكن المنحنى (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$

أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ثم فسر النتيجة بيانياً

ب) حدد وضعية (δ) و (C_f) على المجال $]1, +\infty[$

(7) أرسم (T) ، (δ) و (C_f) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقط)

في كل من الأسئلة التالية ، اختر إجابة صحيحة من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل

(1) (U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما بحيث $U_8 = 32$ و $U_9 \times U_{10} \times U_{11} = 8$

أساسها هو : أ) $q = \frac{1}{4}$ ب) $q = \frac{1}{2}$ ج) $q = 4$

(2) أعضاء الطاقم الصحي لمؤسسة استشفائية موزعين حسب الجدول المقابل
نختار عشوائيا عضو من الطاقم.

	أطباء	ممرضون
ذكور	12	24
إناث	8	16

احتمال أن يكون العضو المختار أنثى هو: أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{4}{30}$ ج) $\frac{1}{2}$

(3) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب : $f(x) = e^{ax} + \frac{b}{x+1}$ ، قيمتا العددين a و b بحيث يكون

المماس لمنحنائها في النقطة $A(0;2)$ موازيا لحامل محور الفواصل هما :

أ) $a=1$ و $b=2$ ب) $a=2$ و $b=1$ ج) $a=1$ و $b=1$

(4) العدد $\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2021} + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2021}$ يساوي : أ) 0 ب) 2021 ج) $2021 \times \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

يحتوي كيس على 9 قريصات متماثلة منها : ثلاثة حمراء تحمل الأرقام 1،0،1- و أربعة قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1،1،0،1- وقريصتين خضراوين تحملان الرقمين 1-، 0 .
نسحب من الكيس عشوائيا ثلاث قريصات في أن واحد .

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية : A " سحب ثلاث قريصات من نفس اللون "

B " سحب ثلاث قريصات مجموع أرقامها معدوم " ، C " سحب ثلاث قريصات جداء أرقامها سالب "

(2) أحسب احتمال الحادث $P(A \cap B)$ وأستنتج $P(\overline{A \cup B})$

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب الرقم الأصغر من بين الأرقام المسحوبة .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب) عين الأمل الرياضي والتباين للمتغير X .

ج) أحسب $P(e^X - 1 > 0)$

التمرين الثالث: (5 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$

(1) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$

(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(3) (أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}$

(ج) عين نهاية المتتالية (u_n)

(4) نضع : (v_n) متتالية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

(أ) بين أن المتتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحددها الأول

(ب) أكتب بدلالة n كل من v_n و u_n .

(ج) أكتب بدلالة n المجموع : $s_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 - xe^{1-x}$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g

(2) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + (x+1)e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، وأحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(ج) استنتج أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها .

(2) (أ) بين أن المستقيم (Δ) المعروف بالمعادلة $y = x$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f) .

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) (T) مستقيم معادلته $y = x + e$ ، بين أن المستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تحديدها .

(4) (أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.9 < \alpha < -0.8$

(ب) أحسب $f(-1.5)$ ثم أرسم (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f) .

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(x+1)e^{1-x} = m$.

انتهى الموضوع الثاني