

مديرية التربية لولاية بومرداس	ثا/ المجاهد علال العيشاوي
السنة الدراسية: $3750^8 / 3751^8$	المدة: 1210^5 دقيقة
اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات	المستوى: 11^2 رياضياتي

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $8x - 5y = 3 \dots\dots (I)$.
- (2) ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية $(p; q)$ من الاعداد الصحيحة تحقق: $m = 8p + 1$ و $m = 5q + 4$.
أ- بين ان الثنائية $(p; q)$ هي حل للمعادلة (I)، ثم استنتج أن: $m \equiv 9 [40]$.
ب- عين اصغر عدد طبيعي m بحيث: $m \geq 2025$.
- (3) ليكن n عددا طبيعيا.
أ- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي k لدينا: $2^{3k} \equiv 1 [7]$.
ب- ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد $2^{2026} [2^{2025}]$ على 7 ؟
(4) ليكن a و b عددان طبيعيان حيث: $0 < a \leq 9$ و $0 < b \leq 9$ ونعتبر العدد N الذي يكتب في النظام العشري على الشكل: $N = \overline{a00b}$ $N = a \times 10^3 + b$.
نريد تعيين من ضمن هذه الاعداد الطبيعية تلك التي تقبل القسمة على 7.
أ- تحقق من ان: $10^3 \equiv -1 [7]$.
ب- استنتج الاعداد الطبيعية التي N تقبل القسمة على 7.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

- (U_n) المتتالية المعرفة بـ: $U_1 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $U_{n+1} = \frac{(n+1)U_n}{U_n + 2n}$.
- (1) أ- تحقق انه من كل عدد طبيعي n غير معدوم فان: $U_{n+1} = (n+1) \left[1 - \frac{2n}{U_n + 2n} \right]$ و $\frac{n+1}{2n+1} \leq 1$ (لاحظ ان $1 \leq 2$)
ب- برهن بالتراجع انه من كل عدد n غير معدوم: $0 < U_n \leq 1$
(2) أ- تحقق انه من كل عدد طبيعي n غير معدوم فان: $U_n > 1 - n$.
ب- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-n-U_n)}{U_n + 2n}$.
ج- استنتج ان المتتالية (U_n) متناقصة تماما ثم برر تقاربها.
(3) نعتبر من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم المتتالية (V_n) المعرفة بـ: $V_n = \frac{U_n}{U_n + n}$.
- بين المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول V_1 .
(4) أ- اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $U_n = \frac{n}{2^n - 1}$.

ب- تحقق ان: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{n \ln 2}{e^{n \ln 2}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$ ثم احسب هاته النهاية واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

ج- احسب العدد S حيث: $S = \frac{1}{U_1} + \frac{2}{U_2} + \frac{3}{U_3} + \dots + \frac{2025}{U_{2025}}$

(5) من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع:

$$S_n = 2 \left(\frac{2U_1 + 1^2}{U_1 + 1} \right) + 2 \left(\frac{3U_2 + 2^2}{U_2 + 2} \right) + 2 \left(\frac{4U_3 + 3^2}{U_3 + 3} \right) + \dots + 2 \left(\frac{(n+1)U_n + n^2}{U_n + n} \right)$$

- بين انه اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فان: $S_n = n^2 + n + 2 - 2^{1-n}$ واستنتج ان:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_{45n}}{n^2} \right) = 2025$$

التمرين الثالث: (09 نقاط)

(I) باستعمال قابلية الاشتقاق للدالة $\ln x \rightarrow x$ عند 1.

- بين ان: $\lim_{n \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x-1} \right) = 1$ ثم استنتج ان: $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

(II) f دالة معرفة على $[1; +\infty[$ ب: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(C_r) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$, $f(x) = \ln x + \ln(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})$

ب- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $\left(x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = x - 1$

ج - اثبت ان الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1، فسر النتيجة هندسيا .

2أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة.

ج- شكل جدول تغيراتها على المجال $[1; +\infty[$.

3 ارسم المنحنى (C_r) .

4 لتكن S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_r) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتاهما: $x=1$, $x=3$.

A و B نقطتان من المنحنى (C_r) فاصلتهما على الترتيب: 1 و 3. والنقطتان $C(1; 2\ln(1 + \sqrt{2}))$ و

$D(3; 0)$ من المستوي.

أ- احسب مساحة كل من المستطيل $ACBD$ والمثلث ABD .

ب- استنتج ان: $2\ln(1 + \sqrt{2}) \leq S \leq 4\ln(1 + \sqrt{2})$. (ارشاد: $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$).

التصحيح النموذجي لاختبار الفصل الثاني

حل تمرين الأول: (٥٥4)

(1) نحل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $8x - 5y = 3$ (I)
 الثانية $(1, 1)$ حل خاص للمعادلة (II)

ومنه:
$$\begin{cases} 8x - 5y = 3 \\ 8x_0 - 5y_0 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$8(x - x_0) - 5(y - y_0) = 0$$

$$8(x - 1) = 5(y - 1)$$

بما أن $\text{PGCD}(8, 5) = 1$ و $\frac{8}{5}(y - 1)$ فإنه حسب

م عوصي فإن: $\frac{8}{5}(y - 1) = 8k$ أي $y - 1 = 5k$

ومنه: $y = 5k + 1$ (III)
 $k \in \mathbb{Z}$

ولدينا: $8(x - 1) = 5(5k + 1 - 1)$ و $8(x - 1) = 25k$

ومنه حسب عوصي: $\frac{8}{5}(x - 1) = 5k$ أي $x - 1 = \frac{25}{8}k$

ومنه: $x = \frac{25}{8}k + 1$ (IV)
 $k \in \mathbb{Z}$

ومنه:
$$S_{\text{II}} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 / (x, y) = \left(\frac{25}{8}k + 1, 5k + 1 \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(2) p - إجابات عن الثانية (p, q) هي حل للمعادلة (I)

والاستنتاج أن: $m \equiv 9[40]$

لدينا: $m = 5q + 4$ و $m = 8p + 1$

يكافئ: $m = 8p + 1 = 5q + 4$

$\Leftrightarrow 8p - 5q = 3 \Leftrightarrow (p, q) \in S_{\text{III}}$

ولدينا: $m = 8p + 1 = 8(5k + 1) + 1$

$= 40k + 9$

ومنه: $m \equiv 9[40]$

أو باستكمال $m = 5q + 4$ مع تقويع $q = 9k + 1$

(3) نثبت أن مفر عدد طبيعي m بحيث $m \equiv 9[40]$

$m \geq 2025 \Leftrightarrow 40K + 9 \geq 2025 \Leftrightarrow K \geq \frac{2016}{40} \geq 50,4$

بما أن $K \in \mathbb{N}$ فإن: $K = 50$ ومنه: $m = 40(50) + 9$

$m = 2009$

(3) - إجابات عن مفر k عدد طبيعي k لدينا:

$\frac{3}{2} \equiv 1[7]$

لدينا: $\frac{3K}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^K = 8^K$

و $8 \equiv 1[7]$ ومنه: $8^K \equiv 1[7]$ إذن: $\frac{3K}{2} \equiv 1[7]$

(4) إيجاد باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2025} على 7

لدينا: $2^{2025} = 3 \times 675 + 3K$

ومنه: $2^{2025} \equiv 3K$

$2^{2025} \equiv 1[7]$ (I) $\frac{3K}{2} \equiv 1[7]$

$\left(\frac{3K}{2}\right)^2 \equiv 1[7]$

$\left(\frac{3K}{2}\right)^3 \equiv 1[7]$

ومنه باقي قسمته $\left(\frac{3K}{2}\right)^3 \equiv 1$ هو 1

(4) - التحقق من أن: $10 \equiv -1[7]$

لدينا: $10 \equiv 3[7] \Leftrightarrow 10^3 \equiv 3^3[7]$

$\equiv 27[7]$

$\equiv 6[7]$

$10^3 \equiv -1[7]$

$N = \overline{a00b} = a \cdot 10^3 + b$

مع $0 < a \leq 9$ و $0 < b \leq 9$

(4) استنتاج الأعداد الطبيعية التي N تقبل لقيمة

على 7

حسبنا: $N = a \cdot 10^3 + b$ و $10^3 \equiv -1[7]$

لدينا: $10^3 \equiv -1[7] \Leftrightarrow 10^3 a + b \equiv -a + b[7]$

وبما أن N تقبل القسمة على 7 فإن: $N \equiv 0[7]$

أي: $a \equiv b[7]$ ومنه $-a + b \equiv 0[7]$

إذن: $(a, b) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (0, 0)\}$

$(1, 8), (8, 1), (2, 9), (9, 2)\}$

$0 < a \leq 9$
 $0 < b \leq 9$

$N = \{1001, 2002, 3003, 4004, 5005, 6006, 7007, 8008, 9009, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000\}$

حل تمرين 02 (07)

$$0 < (n+1) \left(1 - \frac{2n}{U_{n+2n}}\right) \leq \frac{(n+1)}{2n+1} \leq 1$$

$$0 < U_{n+1} \leq 1$$

ومنه: $P(n+1)$ صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}$

لذا حسب مبدأ البرهان بالتراجع نجد

$$0 < U_n \leq 1, n \in \mathbb{N}$$

(P-2) التحقق أنه صواب لكل $n \in \mathbb{N}$: $U_n > 1-n$

$$n > 1 \text{ ومنه : } -n < -1$$

$$\text{ومنه : } 1-n \leq 0 \text{ (موجب)}$$

$$\text{ولدينا : } 1-n < 0 < U_n \leq 1$$

$$\text{ومنه بالتقدي : } 1-n < U_n$$

$$\text{أي : } \boxed{U_n > 1-n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-n-U_n)}{U_{n+2n}}$$

صواب لكل $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)U_n}{U_{n+2n}} - U_n$$

$$= \frac{(n+1)U_n - U_n(U_{n+2n})}{U_{n+2n}}$$

$$= \frac{(n+1)U_n - U_n^2 - 2nU_n}{U_{n+2n}}$$

$$= \frac{U_n(n+1-U_n-2n)}{U_{n+2n}} = \frac{U_n(1-n-U_n)}{U_{n+2n}} \neq$$

(ج) استنتاج أن (U_n) متناقصة كما على $\mathbb{N}$ أو يتزايد

التقارب
جاء أن (U_n) على $\mathbb{N}$ و محدود من الأعلى

بالعدد 0 على متكررة.

$$\exists - \frac{1}{2} \text{ إيجاد } \delta \text{ أن } P(V_n) \text{ يثبت بحيث أن } V_n = \frac{U_n}{U_{n+2n}}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{U_{n+1}+n+1} = \frac{\frac{(n+1)U_n}{U_{n+2n}}}{\frac{(n+1)U_n}{U_{n+2n}} + n+1}$$

$$= \frac{(n+1) \left[\frac{U_n}{U_{n+2n}} \right]}{(n+1) \left[\frac{U_n}{U_{n+2n}} \right] + n+1} = \frac{U_n}{U_{n+2n} + U_n + 2n}$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{2} V_n} \text{ ومنه } P(V_n) \text{ صواب } \Rightarrow \frac{U_n}{2U_{n+2n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_n}{U_{n+2n}} \right) = \frac{1}{2} V_n$$

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{(n+1)U_n}{U_{n+2n}} \end{cases}$$

(P-1) التحقق أنه صواب لكل $n \geq 1$

$$\frac{n+1}{2n+1} \leq 1 \text{ و } U_{n+1} = (n+1) \left[1 - \frac{2n}{U_{n+2n}} \right]$$

لدينا: صواب لكل $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1) \left[1 - \frac{2n}{U_{n+2n}} \right] = (n+1) \left[\frac{U_{n+2n} - 2n}{U_{n+2n}} \right]$$

$$= \frac{(n+1)U_n}{U_{n+2n}} = U_{n+1}$$

$$\text{ومنه : } \boxed{U_{n+1} = (n+1) \left[1 - \frac{2n}{U_{n+2n}} \right]} \neq$$

$$\text{ولدينا : } 1 \leq 2 \text{ ومنه : } n \leq 2n$$

$$\text{ومنه : } n+1 \leq 2n+1$$

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{n+1}{n+1} > \frac{n+1}{2n+1} \text{ (جاء : } (n+1) > 1 \text{)}$$

$$\boxed{\frac{n+1}{2n+1} \leq 1} \neq$$

بإ البرهان بالتراجع أن : $0 < U_n \leq 1$

$$P(n) : 0 < U_n \leq 1$$

لنأخذ من صحة $P(n)$ كخاصية صواب لكل $n \in \mathbb{N}$

$$P(1) : U_1 = 1 \leq 1$$

ومنه : $P(1)$ صواب.

- نفرض : $0 < U_n \leq 1$ ونفرض صحة $0 < U_{n+1} \leq 1$

صواب لكل عدد غير معدوم.

$$\text{لدينا : } 0 < U_n \leq 1$$

$$2n < U_{n+2n} \leq 2n+1$$

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{U_{n+2n}} < \frac{1}{2n}$$

$$-1 < \frac{-2n}{U_{n+2n}} \leq \frac{-2n}{2n+1}$$

$$0 < 1 - \frac{2n}{U_{n+2n}} \leq 1 - \frac{2n}{2n+1}$$

س حساب (P-15)

$$S = \frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2} + \frac{3}{u_3} + \dots + \frac{2025}{u_{2025}}$$

(n) $W_n = \frac{n}{u_n} = \frac{n}{2^n - 1} = \frac{n(2^n - 1)}{2^n - 1}$ نقع

$\{W_n = 2^n - 1\}$ مانع

س حساب

$$S = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_{2025}$$

$$= 2^1 - 1 + 2^2 - 1 + 2^3 - 1 + \dots + 2^{2025} - 1$$

$$= (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2025}) - 1(2025 - 1 + 1)$$

س حساب

$$= 1 \left(\frac{2^{2026} - 2}{2 - 1} \right) - 2025$$

$$= (2^{2026} - 2) - 2025 = 2^{2026} - 2026$$

س حساب

$$S_n = \frac{n^2 + n + 2 - 2^{1-n}}{2}$$

$$S_n = 2 \left(\frac{2u_1 + 1}{u_1 + 1} \right) + 2 \left(\frac{3u_2 + 2}{u_2 + 2} \right) + \dots + 2 \left(\frac{(n+1)u_{n+1}}{u_{n+1} + n+1} \right)$$

لدينا

$$\frac{(n+1)u_{n+1} + n^2}{u_{n+1} + n} = \frac{n u_{n+1} + u_{n+1} + n^2}{u_{n+1} + n}$$

$$= \frac{u_n}{u_{n+1}} + \frac{n u_{n+1} + n^2}{u_{n+1} + n}$$

$$= V_n + n \left(\frac{u_{n+1}}{u_{n+1} + n} \right)$$

$S_n = V_n + n$ #

س حساب

$$S_n = 2(V_1 + 1) + 2(V_2 + 2) + 2(V_3 + 3) + \dots + 2(V_n + n)$$

$$= 2(V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n) + 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) + \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$= 2 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 2 + n^2 + n - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = n^2 + n + 2 - 2^{1-n}$$

س حساب

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{45n^2 + 45n + 2 - 2}{n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2025n^2 + 45n + 2 - 2}{n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2025 + \frac{45}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^2} \right)$$

$$= 2025$$

وحتها (معدل)

$$V_1 = \frac{u_1}{u_1 + 1} = \frac{1}{2}$$

P-4 كتابة عبارة V_n بدلالة u_n

$$V_n = V_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n}$$

س حساب

$$u_n = \frac{n}{2^n - 1}$$

لدينا

$$V_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

وحتها

$$V_n | u_{n+1} = u_n$$

$$V_n u_{n+1} + n V_n = u_n$$

$$V_n u_{n+1} - u_n = -n V_n$$

$$u_n (V_n - 1) = -n V_n$$

$$u_n (1 - V_n) = n V_n$$

وحتها

$$u_n = \frac{n V_n}{1 - V_n}$$

وحتها

$$u_n = \frac{n \left(\frac{1}{2^n} \right)}{1 - \frac{1}{2^n}} = \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{2^n - 1}{2^n}} = \frac{n}{2^n - 1}$$

س حساب

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2}{e^{n \ln 2}} \right)$$

س حساب

$$\frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2}{e^{n \ln 2}} \right) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2}{e^{n \ln 2}} \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2}{2^n} \right) = \frac{n}{2^n}$$

وحتها

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2}{e^{n \ln 2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{e^{n \ln 2}} \right] = 0$$

لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n \ln 2}}{n^2} = +\infty$$

س حساب

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2^n - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2^n \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2^n} \right) = 0$$

(س ح)

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln n + \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)}{n - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \left(\frac{\ln n}{n-1} \right) + \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)}{n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)}{n \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \times \frac{1}{n \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{لأن}$$

و منه، الدالة f غ ق 1 عند 1
* التفسير الهندسي

(ق) يقبل نصف مماس عند 1 على $1 + \infty$

حساب P-2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n + \sqrt{n^2 - 1}) = +\infty$$

$$f'(n) = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}, \quad n \geq 1 \quad \text{كل } n \geq 1$$

f دالة معرفة وق 1 على المجال $[1, +\infty)$ و دالة

$$\begin{aligned} f'(n) &= \frac{1 + \frac{2n}{2\sqrt{n^2 - 1}}}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{n^2 - 1} + n}{\sqrt{n^2 - 1}}}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \end{aligned}$$

بما أن $n > 1$ فإن $f'(n) > 0$

و منه: الدالة f متزايدة على D
(ج) جدول التغيرات

n	1	$+\infty$
$f'(n)$	+	
$f(n)$	0	$+\infty$

ط 3 03 (09)

(I) إثبات صحة النهايتين الشهيرتين:

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln n}{n-1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln n - \ln 1}{n-1} = g'(1) = 1$$

$$g(1) = \ln 1 = 0 \leftarrow g(n) = \ln n.$$

$$g'(1) = \frac{1}{1} = 1 \leftarrow g'(n) = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln n}{n-1} = 1 \quad \text{و منه}$$

$$n = X + 1 \quad \text{و نع: } X = n - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln n}{n-1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1 \quad \text{و منه}$$

$$f(n) = \ln(n + \sqrt{n^2 - 1}) / n = [1, +\infty[$$

P-1: إثبات أنه من أجل كل $n \geq 1$

$$f(n) = \ln n + \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$$

$$\ln(n + \sqrt{n^2 - 1}) = \ln \left[n + \sqrt{n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} \right]$$

$$= \ln \left[n + n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right]$$

$$= \ln \left[n \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \right]$$

$$f(n) = \ln n + \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \quad \#$$

$$n \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = n - 1 \quad \text{لأن}$$

$$n \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \times \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} = n \sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{n+1} \frac{(n^2-1)}{n^2}}$$

$$= \frac{n}{n^2} \sqrt{(n-1)(n+1)(n^2-1)}$$

$$= \sqrt{(n-1)^2} = n - 1 \quad \text{و منه}$$

$$n \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = n - 1 \quad \# \quad \text{و د!}$$

(ج) إثبات أن الدالة f غ ق 1 عند 1 مع التفسير الهندسي

جنب النهاية

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{f(n) - f(1)}{n - 1}$$

$$/ f'(1) = 0$$

$$g(n) = \frac{e^n + 1}{2e^n} \quad ; D_g = [0, +\infty[$$

اثبات أن $g(n) > 1$: $n > 0$ كل

$$g(n) - 1 = \frac{e^n + 1}{2e^n} - 1 = \frac{e^n + 2e^n + 1}{2e^n} = \frac{(e^n - 1)^2}{2e^n} \geq 0$$

لذلك $g(n) - 1 \geq 0$: $n > 0$ كل

$$g(n) \geq 1 \quad \text{وهو المطلوب}$$

1P-2 اثبات أن : $g \circ f(n) = n$: n ثابت

أثبت إذا كانت $M(n, y)$ نقطة من (f) فإن :

$$(g \circ f)(n) = \frac{\frac{e^{f(n)} + 1}{2e^{f(n)}}}{2e^{f(n)}} = \frac{n + \sqrt{n^2 - 1} + 1}{2(n + \sqrt{n^2 - 1})}$$

$$g \circ f(n) = \frac{n^2 + n^2 - 1 + 2n\sqrt{n^2 - 1} + 1}{2(n + \sqrt{n^2 - 1})}$$

$$= \frac{2n^2 + 2n\sqrt{n^2 - 1}}{2(n + \sqrt{n^2 - 1})}$$

$$= \frac{2n(n + \sqrt{n^2 - 1})}{2(n + \sqrt{n^2 - 1})} = n$$

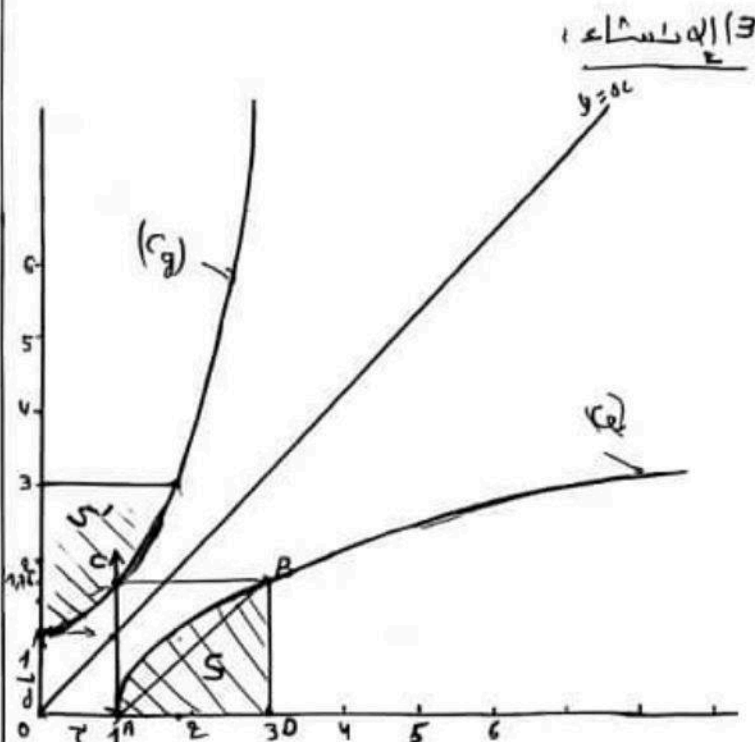
$$g \circ f(n) = n \quad \text{لذلك من أجل كل } n > 0$$

نقطة $M(n, y)$ من المنحنى (f) :
أيضا : $y = f(n)$

وبما أن $g[f(n)] = n$ فإن $M(f(n), n)$ نقطة من المنحنى (g) أي : $M(y, n) \in (g)$

بإستنتاج حول (f) و (g) :

بما أن المنحني منسوب إلى PM فإن المنحني (f) و (g) متناظران بالنسبة للمنفذ الأول ذو المعادلة $y = x$



1P-4 حساب مساحة كل من المستطيل ACBD و المثلث ABD :

S : مساحة المنحني المستوي المحدد بالمنحنى (f) ومحاور القواصل والمستقيمة AC و BC و AB :
وهو : $n=1$ و $n=3$

$$S = \int_1^3 f(n) dn$$

لدينا النقطة A من (f) أي $A(1,0)$

و B نقطة من (f) فأصلها $n=3$ أي $B(3, f(3))$

$$f(3) = f(3 + \sqrt{8}) = f(3 + 2\sqrt{2}) = f(1 + \sqrt{2})^2 = 2f(1 + \sqrt{2})$$

وهو : مساحة المثلث ABD هي

$$A_1 = \frac{BD \times AD}{2} = \frac{f(3) \times 2}{2} = f(3) = 2f(1 + \sqrt{2})$$

و A_2 : مساحة المستطيل ACBD

$$A_2 = AD \times BD = 2f(3) = 4f(1 + \sqrt{2})$$

بإستنتاج أن $2f(1 + \sqrt{2}) \leq S \leq 4f(1 + \sqrt{2})$

تلاحظ أن مساحة S محصورة بين A_1 و A_2

المثلث ABD و A_2 مساحة المستطيل ACBD.

$$2f(1 + \sqrt{2}) \leq S \leq 4f(1 + \sqrt{2})$$

استنتاج قيمة S

بحالان (q) و (q) متساويان بالنسبة
للمتصف الأول $x=y$ فإن $S=S'$

$$S=S' = 6 \ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} g(x) dx$$

$$S = 6 \ln(1+\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} \quad \text{cm}^2$$

انتهى بالتوفيق والبرهان
للتكامل في الأعزلة.

عن الأستاذة، مبرور.

رسم (Cg)

13. 4. إثبات أن: $S' = 6 \ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} g(x) dx$

S' مساحة المثلث المحدد بـ (q) والمستقيمات

$$S' = \int_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} [3 - g(x)] dx = \int_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} 3 dx - \int_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} g(x) dx$$

$$= [3x]_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} - \int_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} g(x) dx$$

$$S' = 6 \ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} g(x) dx$$

10. حساب S

$$S = \int_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} g(x) dx$$

لدينا،

$$g(x) = \frac{e^x + 1}{2e^x} = \frac{e^x(e^x + e^{-x})}{2e^x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

و متساوي

$$\int_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} g(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} (e^x + e^{-x}) dx$$

$$= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_0^{2 \ln(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2} \left[(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2]$$

$$= \frac{1}{2} (4\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

ملاحظة: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$ باستعمال المرافق.