

الواجب المنزلي الأول في الرياضيات

الاساتذ مويات براء عبد الإله

شعبة تقني رياضي



دراسة دالة ناطقة

01

التمرين

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{2x - 1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيايا.

(2) أـ بين أنه من أجل كل $x \neq \frac{1}{2}$ ، $f'(x) = \frac{2(x-1)(4x^2+1)}{(2x-1)^2}$.

بـ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الترتيب.

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 بحيث : $-0.7 < x_0 < -0.6$.

(5) أـ بين أنه من أجل كل $x \neq \frac{1}{2}$ ، $f(x) = x^2 + \frac{1}{2x-1}$.

بـ بين أن المنحنى (γ) منحنى الدالة $x \mapsto x^2$ مقارب للمنحنى (C_f) .

جـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (γ) .

(6) أنشئ كلاما من (γ) و (C_f) .



دراسة دالة صماء

02

التمرين

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = \frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

بـ إستنتج اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+2x+2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

بـ بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ ، ثم فسر النتيجة بيايا.

(2) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(3) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$.

بـ إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل مبدأ المعلم، يطلب كتابة معادلته له.

(5) عين فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل .

(6) أنشئ كلامن (Δ) ، (T) و (C_f) .

(7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = mx$.

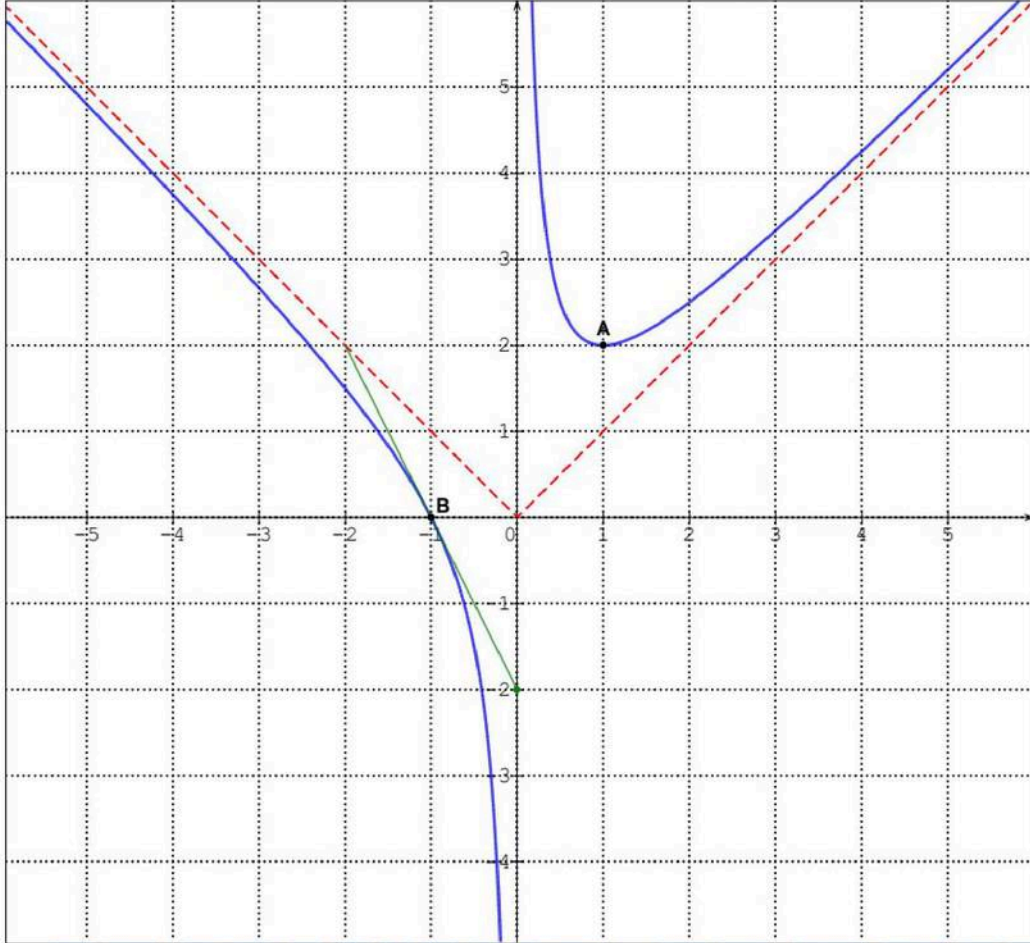
قراءة بيانية

03

التمرين

f الدالة العددية المعرفة بتمثلها البياني (C_f) المقابل :

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f) . $A(1;2)$ و $B(-1;0)$ نقطتان من المنحنى (C_f) . مماس المنحنى (C_f) في النقطة B .



بقراءة بيانية :

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) حدد نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف .

(3) عين النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$.

(4) استنتج النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\tan x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.

(5) عين $f'(1)$ و $f'(-1)$.

(6) أكتب معادلة المماس (T) .

(7) حل بيانيا المتراجحة : $f'(x) < 0$.

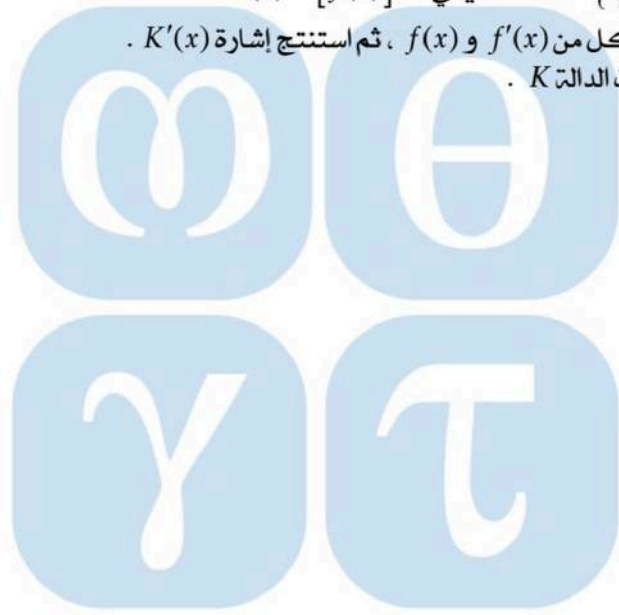
التمرين 04 دراسة دالة مثلثية

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \cos 2x - 4 \cos x$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ- بين أن الدالة f دورية ودورها 2π .
ب- بين أن الدالة f زوجية.
 - (2) أ- عين f' الدالة المشتقة للدالة f .
ب- بزر أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 4 \sin x [1 - \cos x]$.
ج- أدرس إشارة $f'(x)$ من أجل $x \in [0; \pi]$.
د- أنجز جدول تغيرات للدالة f على المجال $[0; \pi]$.
 - (3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[0; \pi]$ حلا وحيدا α حيث : $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.
 - (4) بين أن النقطة ذات الفاصلة $\frac{2\pi}{3}$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .
 - (5) أ- أرسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\pi; \pi]$.
ب- كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$.
(إرشادات : $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ ، $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$)

التمرين 05 مسألة شاملة

- (I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 3$.
- (1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.37 < \alpha < -0.36$.
ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.
- (II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{(x-1)^2}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
 - (2) أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : من أجل كل $x \neq 1$ ، $f(x) = x + a + \frac{bx}{(x-1)^2}$.
ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.
ج- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
 - (3) أ- بين أنه من أجل كل $x \neq 1$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$.
ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (4) بين أنه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب كتابة معادلته له.
 - (5) أكتب معادلة المماس (T') للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

- (6) أ- بين أن : $f(\alpha) = 1 - \frac{8}{\alpha-1} - \frac{12}{(\alpha-1)^2}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.
 ب- عين دون حساب : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$. فسر النتيجة ببيانيا .
- (7) عين فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل .
- (8) أنشئ كلا من (Δ) ، (T) ، (T') و (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.4$)
- (9) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول كلا من المعادلات :
 $f(x) = mx$ و $f(x) = x + m$ ، $f(x) = m$.
- (III)** نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = -f(-|x|)$ ، و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .
 أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند 0 .
 ب- بين أن الدالة h زوجية ، ثم أنشئ المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) .
- (IV)** نعتبر الدالة K المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$: $K(x) = [f(x)]^2$.
 أ- أحسب $K'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثم استنتج إشارة $K'(x)$.
 ب- شكّل جدول تغيرات الدالة K .



MOUYET MATH

حل الواجب المنزلي الأول في الرياضيات

شعبة تقني رياضي



دراسة دالة ناطقة

01

التمرين

الف الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{2x - 1}$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى

(2) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $\left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$ و $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ ومن أجل كل $x \neq \frac{1}{2}$ ،

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 2x)(2x - 1) - 2(2x^3 - x^2 + 1)}{(2x - 1)^2} = \frac{8x^3 - 8x^2 + 2x - 2}{(2x - 1)^2} = \frac{2(x - 1)(4x^2 + 1)}{(2x - 1)^2}$$

جدول تغيرات الدالة :

x	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	-	- +
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$+\infty$ ↘ 2 ↗ $+\infty$

(3) كتابة معادلة (T) مماس المنحنى في نقطة تقاطعه مع حامل محور الترتيب :

$$\text{لدينا : } (T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad \text{ومنه } (T) : y = -2x - 1$$

(4) تبين أن المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 بحيث : $-0.7 < x_0 < -0.6$

$$\begin{cases} f(-0.7) \approx 0.07 \\ f(-0.6) \approx -0.09 \end{cases} \quad \text{و} \quad \left] -0.7; -0.6 \right[\subset \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\quad \text{و} \quad \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\text{أي } 0 < f(-0.7) \times f(-0.6) \quad \text{ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبل في المجال } \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\text{ حلا وحيدا } x_0$$

$$\text{بحيث } -0.7 < x_0 < -0.6 \quad \text{و من جهة أخرى، من أجل كل } x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\quad f(x) \geq 2$$

وبالتالي المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 و $-0.7 < x_0 < -0.6$

$$(5) \quad \text{أ- من أجل كل } x \neq \frac{1}{2} \quad x^2 + \frac{1}{2x - 1} = \frac{x^2(2x - 1) + 1}{2x - 1} = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{2x - 1} = f(x)$$

ب- تبين أن المنحنى (γ) منحنى الدالة $x \mapsto x^2$ مقارب للمنحنى

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2x - 1} \right) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x - 1} \right) = 0$$

للمنحنى

ج- وضعية المنحنى بالنسبة للمنحنى (γ) :

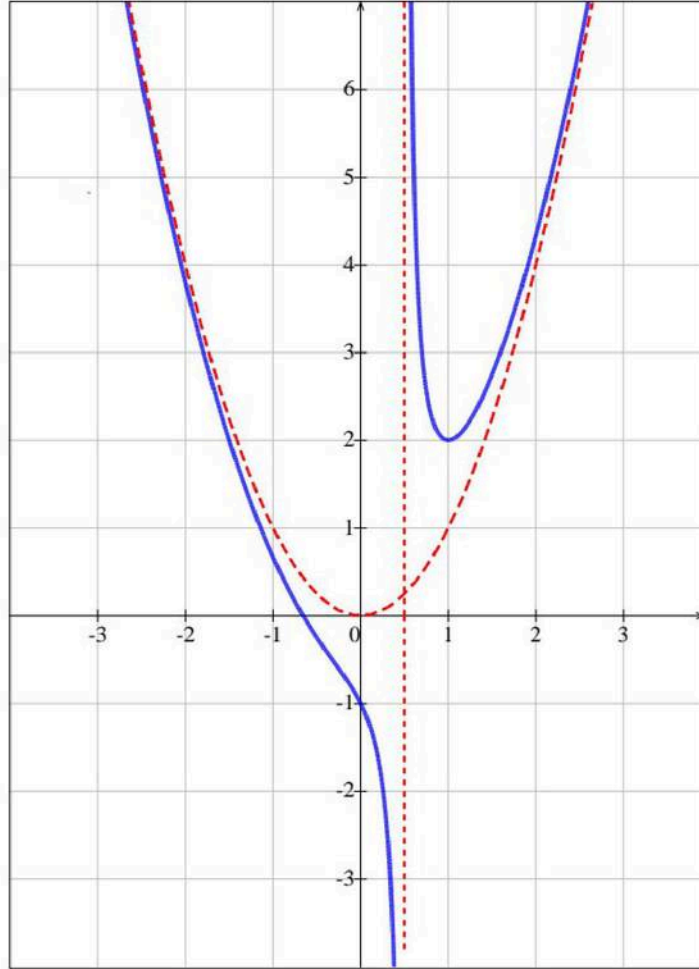
$$\text{لدينا : } f(x) - x^2 = \frac{1}{2x - 1} \quad \text{ومنه إشارة الفرق من إشارة } 2x - 1 \text{ وبالتالي :}$$

• من أجل $x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right]$: المنحنى (C_f) يقع تحت المنحنى (γ) .

• من أجل $x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$: المنحنى (C_f) يقع فوق المنحنى (γ) .

• المنحنى (C_f) لا يقطع المنحنى (γ) .

(6) الرسم :



(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

(1) النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} \right) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} \right) = 2$

(2) أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = \frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$ ،

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}(x+1)}{x^2+2x+2} = \frac{\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$$

ب- إستنتاج اتجاه تغير الدالة g :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) > 0$ (لاحظ أن : $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$)
وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	2

(3) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$.

حسب جدول تغيرات الدالة g ، نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+2x+2}$.

(1) أ- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - 1 + \sqrt{x^2+2x+2}] = +\infty$

ب- تبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-4x-1}{x-1-\sqrt{x^2+2x+2}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\left(-4 - \frac{1}{x}\right)}{1 - \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} \right] = -2$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = -2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

(2) تبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x - 1 + \sqrt{x^2+2x+2}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{-x-1-\sqrt{x^2+2x+2}} \right] = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-2 \rightarrow +\infty$	

(4) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل مبدأ المعلم، يطلب كتابة معادلة له .

لدينا : معادلة لـ (T) من الشكل $(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$

(T) يشمل مبدأ المعلم معناه : $0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$

لنبحث عن a يحل المعادلة : $f(a) = a \cdot f'(a)$

$$f(a) = a \cdot f'(a) \text{ تكافئ } a - 1 + \sqrt{a^2 + 2a + 2} = a + \frac{a(a+1)}{\sqrt{a^2 + 2a + 2}} \text{ تكافئ } a + 2 = \sqrt{a^2 + 2a + 2} \text{ تكافئ } a = -1$$

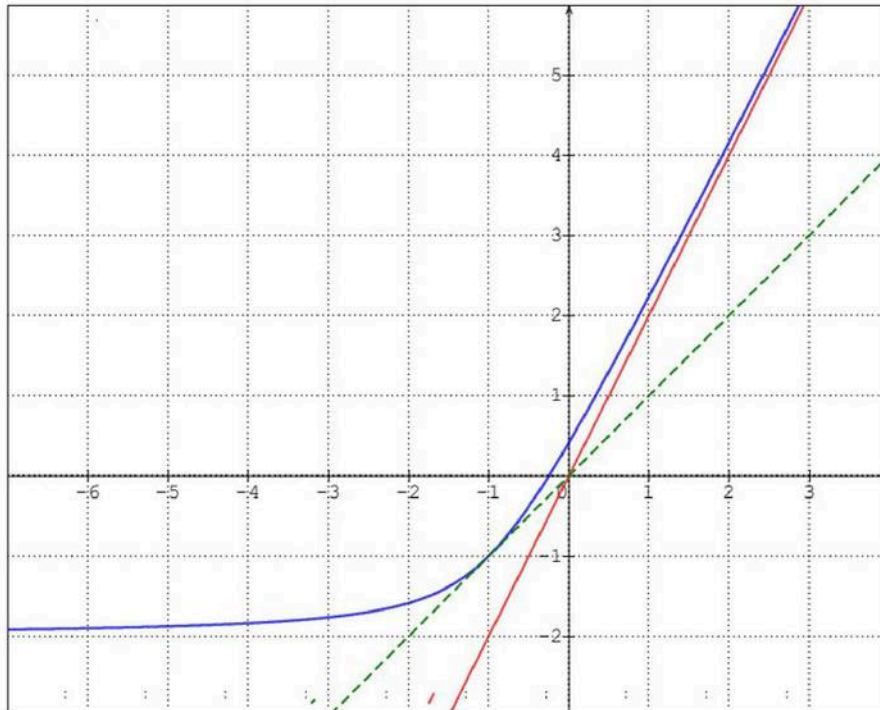
كتابة معادلة لـ (T) : $(T): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ ومنه : $(T): y = x$.

(5) تعيين فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل :

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } \sqrt{x^2 + 2x + 2} = -x + 1 \text{ تكافئ } \begin{cases} x^2 + 2x + 2 = (-x + 1)^2 \\ x \leq 1 \end{cases} \text{ تكافئ } x = -\frac{1}{4}$$

(6) الرسم :



(7) المناقشة البيانية :

حلول المعادلة : $f(x) = mx$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$.

من أجل $m \in]0; 1[$ ، المعادلة تقبل حلين سالبين .

من أجل $m = 1$ ، المعادلة تقبل حل واحد سالب .

من أجل $m \in]1; 2[$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

من أجل $m \in]2; +\infty[$ ، المعادلة تقبل حل واحد موجب .

من أجل $m \in]-\infty; 0[$ ، المعادلة تقبل حل واحد سالب .

الإجابة عن الأسئلة، بقراءة بيانية:

(1) مجموعة تعريف الدالة $f: D_f = \mathbb{R}^*$.

(2) النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(3) النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$$

(4) استنتاج النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(\tan x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} \right] = \frac{1}{2} \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(\tan x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = +\infty \text{ لدينا}$$

$$f'(-1) = -2 \text{ و } f'(1) = 0 \quad (5)$$

$$(T): y = -2x - 2 \text{ كتابة معادلة المماس } (T) \quad (6)$$

$$f'(x) < 0 \text{ حل بيانيا المتراجحة} \quad (7)$$

$$S =]-\infty; 0[\cup]0; 1[$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \cos 2x - 4 \cos x$.

(1) أـ تبين أن الدالة f دورية ودورها 2π .

$$\text{لدينا : من أجل كل عدد حقيقي , } f(x + 2\pi) = \cos(2x + 4\pi) - 4 \cos(x + 2\pi) = \cos 2x - 4 \cos x = f(x)$$

ومنه الدالة f دورية ودورها 2π .

بـ تبين أن الدالة f زوجية:

$$\text{لدينا : من أجل كل عدد حقيقي , } f(-x) = \cos(-2x) - 4 \cos(-x) = \cos 2x - 4 \cos x = f(x)$$

ومنه الدالة f زوجية.

(2) أـ تعيين f' الدالة المشتقة للدالة f .

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ و من أجل كل عدد حقيقي } x, f'(x) = -2 \sin 2x + 4 \sin x$$

$$\text{بـ التبرير أنه من أجل كل عدد حقيقي } x, f'(x) = 4 \sin x [1 - \cos x]$$

$$\text{لدينا : } f'(x) = -2 \sin 2x + 4 \sin x = -2 \times 2(\sin x)(\cos x) + 4 \sin x = 4 \sin x [1 - \cos x]$$

جـ دراسة إشارة $f'(x)$ من أجل $x \in [0; \pi]$.

$$\text{لدينا : من أجل } x \in [0; \pi], \sin x \geq 0 \text{ و } 1 - \cos x \geq 0, \text{ ومنه : من أجل } x \in [0; \pi], f'(x) \geq 0.$$

دـ جدول تغيرات للدالة f على المجال $[0; \pi]$.

x	0	π
$f'(x)$		+
$f(x)$	-3	5

(3) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[0; \pi]$ حلا وحيدا α حيث: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

الدالة f مستمرة ومنتزعة على المجال $[0; \pi]$ وأي $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \times f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[0; \pi]$ حلا وحيدا α حيث: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

(4) تبين أن النقطة ذات الفاصلة $\frac{2\pi}{3}$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

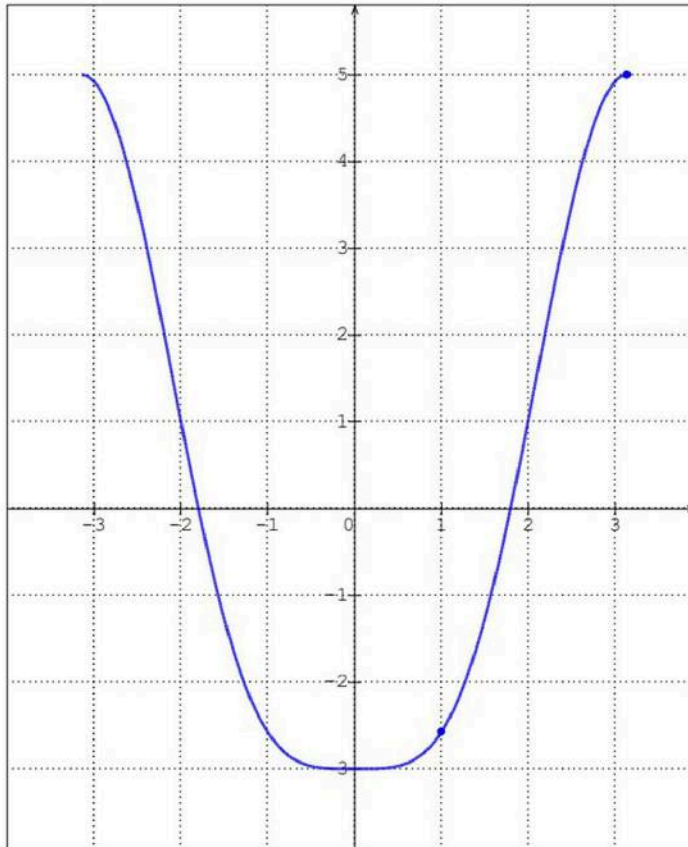
الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f''(x) = -4 \cos 2x + 4 \cos x = 4 \left[-(2 \cos^2 x - 1) + \cos x \right] = 4(1 + \cos x - 2 \cos^2 x) = 4(1 - \cos x)(1 + 2 \cos x)$$

إشارة $f''(x)$ على المجال $[0; \pi]$:

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f''(x)$	+	0	-

(5) أ- رسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\pi; \pi]$.



ب- نحصل على المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$ بإجراء إنسحابات أشعتها $(2k\pi)i$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 3$:
(1) أ- النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = 3x^2 - 6x + 7$ ،

لدينا : $\Delta = -48 < 0$ ومنه : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) > 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.4 < \alpha < -0.3$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-0.37) \approx -0.05 \\ g(-0.36) \approx 0.04 \end{cases}$ أي $g(-0.37) \times g(-0.36) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.37 < \alpha < -0.36$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{(x-1)^2}$:

(1) أ- النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

(2) أ- تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : من أجل كل $x \neq 1$ ، $f(x) = x + a + \frac{bx}{(x-1)^2}$.

$$x + a + \frac{bx}{(x-1)^2} = \frac{(x+a)(x-1)^2 + bx}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + (a-2)x^2 + (1-2a+b)x + a}{(x-1)^2} , \quad x \neq 1$$

وبالمطابقة نجد : $a = 0$ و $b = -4$.

ب- استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) مع تعيين معادلته :

$$\text{لدينا : } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4x}{(x-1)^2} \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4x}{x^2} \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{x} \right) = 0$$

مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ج- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

$$\text{لدينا : } f(x) - y = f(x) - x = \frac{-4x}{(x-1)^2} \quad \text{ومنه إشارة الفرق } f(x) - y \text{ من إشارة } -4x :$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-	-
الوضع النسبي	(Δ) فوق (C_f)	(Δ) يقطع (C_f)	(Δ) تحت (C_f)	(Δ) تحت (C_f)

(3) أ- تبيان أنه من أجل كل $x \neq 1$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$ ومن أجل كل $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x - 3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 2x^2 - 3x)}{(x-1)^4} = \frac{(3x^2 - 4x - 3)(x-1) - 2(x^3 - 2x^2 - 3x)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 7x + 3}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

ب- دراسة إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]-\infty; \alpha[$ و $]1; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $[\alpha; 1]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$	$+\infty$

(4) تبيان أنه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) ، مع كتابة معادلته له :

يكفي إثبات أن المعادلة $f'(x) = 1$ تقبل في المجموعة $\mathbb{R} - \{1\}$ حلا وحيدا .

$$f'(x) = 1 \text{ تكافئ } \frac{g(x)}{(x-1)^3} = 1 \text{ تكافئ } g(x) = (x-1)^3 \text{ تكافئ } x = -1 .$$

كتاب معادلة للمماس (T) :

لدينا : $(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ ومنه $(T) : y = x+1$.

(5) كتابة معادلة (T') مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 :

لدينا : $(T') : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ومنه $(T') : y = -3x$.

$$(6) \text{ أ- تبيان أن : } f(\alpha) = 1 - \frac{8}{\alpha-1} - \frac{12}{(\alpha-1)^2} .$$

$$\text{لدينا : } f(\alpha) - \left(1 - \frac{8}{\alpha-1} - \frac{12}{(\alpha-1)^2}\right) = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 - 3\alpha}{(\alpha-1)^2} - \left(\frac{(\alpha-1)^2 - 8(\alpha-1) - 12}{(\alpha-1)^2}\right) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = 0$$

إعطاء حصر للعدد $f(\alpha)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{1.37} < -\frac{8}{\alpha-1} < \frac{8}{1.36} \\ -\frac{12}{(1.36)^2} < -\frac{12}{(\alpha-1)^2} < -\frac{12}{(1.37)^2} \end{array} \right\} \text{ أي } \left\{ \begin{array}{l} -1.37 < \alpha-1 < -1.36 \\ -\frac{1}{1.36} < \frac{1}{\alpha-1} < -\frac{1}{1.37} \\ \frac{1}{(1.37)^2} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{(1.36)^2} \end{array} \right. \text{ لدينا: } -0.37 < \alpha < -0.36 \text{ ومنه}$$

وبالتالي $1 + \frac{8}{1.37} - \frac{12}{(1.36)^2} < 1 - \frac{8}{\alpha-1} - \frac{12}{(\alpha-1)^2} < 1 + \frac{8}{1.36} - \frac{12}{(1.37)^2}$ إذن: $0.35 < f(\alpha) < 0.48$.

ب- تعيين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$

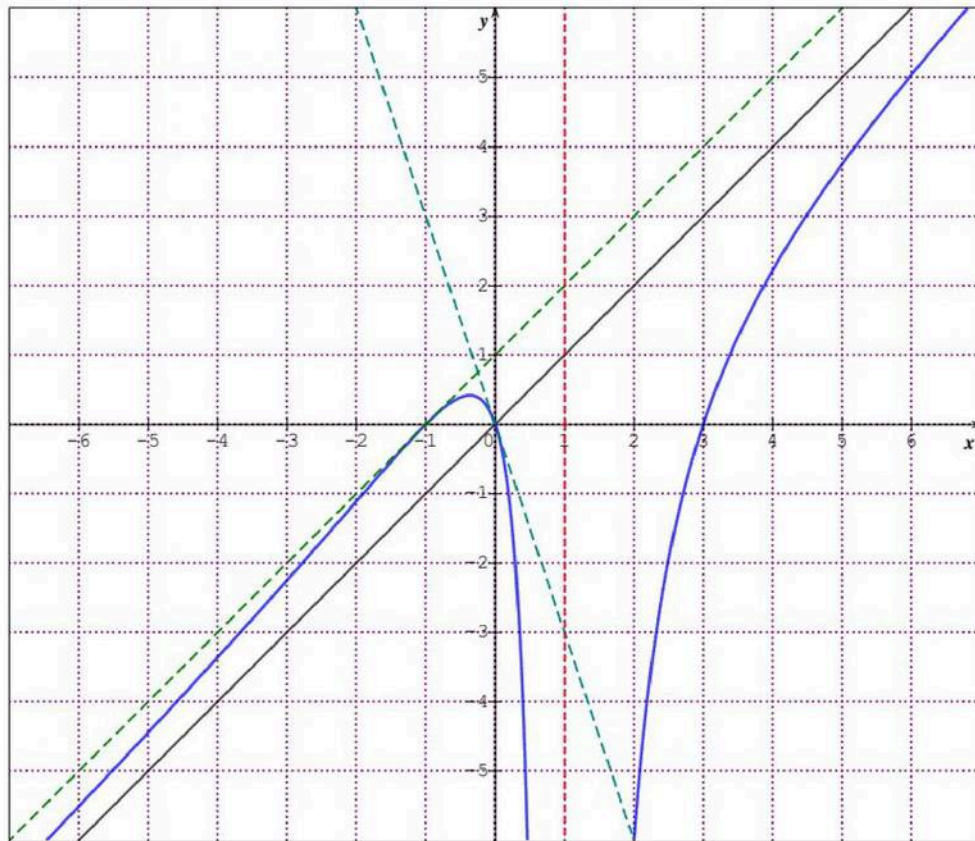
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^3} = 0 \text{ لدينا:}$$

التفسير: المنحنى (C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة α مماسا أفقيا معادلته $y = f(\alpha)$.

(7) تعيين فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

لنحل في المجموعة $\mathbb{R} - \{1\}$ المعادلة: $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \text{ تكافئ } x(x^2 - 2x - 3) = 0 \text{ تكافئ } x = 0 \text{ أو } x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ تكافئ } x \in \{-1; 0; 3\}.$$



(8) الرسم:

(9) المناقشة البيانية :

حلل المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة : $y = m$.

• من أجل $m < 0$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول ، حلين موجبين وآخر سالب .

• من أجل $m = 0$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول ، حل موجب وآخر سالب و الثالث معدوم .

• من أجل $0 < m < f(\alpha)$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول ، حلين سالبين وآخر موجب .

• من أجل $m = f(\alpha)$ ، المعادلة تقبل حلين ، مختلفين في الإشارة .

• من أجل $m > f(\alpha)$ ، المعادلة تقبل حل واحد موجب .

حلل المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة : $y = x + m$.

• من أجل $m < 0$ ، المعادلة تقبل حلين موجبين .

• من أجل $m = 0$ ، المعادلة تقبل حل واحد معدوم .

• من أجل $0 < m < 1$ ، المعادلة تقبل حلين سالبين .

• من أجل $m = 1$ ، المعادلة تقبل حل واحد سالب .

• من أجل $m > 1$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

حلل المعادلة $f(x) = mx$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة : $y = mx$.

• من أجل $m = -3$ ، المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر معدوم .

• من أجل $-3 < m < 1$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول ، إثنان مختلفان في الإشارة والآخر معدوم .

• من أجل $m > 1$ ، المعادلة تقبل حل واحد معدوم .

• من أجل $m < -3$ ، المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر معدوم .

(III) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = -f(-|x|)$ ، و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

أ- دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 3}{(-x - 1)^2} = -3 \text{ لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x - 1)^2} = 3 \text{ و}$$

وبالتالي الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

ب- تبين أن الدالة h زوجية :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x ، $h(-x) = -f(-|-x|) = -f(-|x|) = h(x)$ ، ومنه الدالة h زوجية .

شرح طريقة المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) :

$$h(x) = -f(-|x|) = \begin{cases} -f(-x) & ; x \geq 0 \\ -f(x) & ; x \leq 0 \end{cases} \text{ ، لدينا : من أجل كل عدد حقيقي } x$$

ومنه :

على المجال $]-\infty; 0]$ ، المنحنى (C_h) نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل ولرسم (C_h) على المجال $[0; +\infty[$

نستخدم كون الدالة h زوجية .

(IV) نعتبر الدالة K المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $K(x) = [f(x)]^2$.

أ- حساب $K'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$:

الدالة K قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$ ومن أجل كل $x \neq 1$: $K'(x) = 2f'(x) \times f(x)$

إشارة $K'(x)$:

x	$-\infty$	-1	α	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	0
$K'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

بـ جدول تغيرات الدالة K .

x	$-\infty$	-1	α	0	1	3	$+\infty$
$K'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$K(x)$	$+\infty$	0	$[f(\alpha)]^2$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$