



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين
الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن C, B, A نقط لواحقها على الترتيب:
(1) قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $(z_A)^n = (z_B)^n$ اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير.
 $z_C = 4 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = 1 + i\sqrt{3}$

$$(2) \text{ العدد } \left(\frac{z_A}{z_B} \right)^{2023} \text{ يساوي :}$$

$$n = 3k \quad n = 3k + 6 \quad n = 6k$$

$$(3) \text{ لاحقة مركز ثقل المثلث } ABC \text{ هي :}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$2 + i\sqrt{3} \quad 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}i \quad 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$(4) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي المركب ذات اللاحقة } z \text{ التي تحقق : } |z| = |\overline{z} - \overline{z_B}|$$

$$\text{محور القطعة } [OA] \quad \text{محور القطعة } [OB] \quad \text{محور القطعة } [AB]$$

$$(5) \text{ لاحقة النقطة } D \text{ حتى يكون الرباعي } ABCD \text{ متوازي أضلاع هي :}$$

$$z_D = 4 \quad z_D = -4 \quad z_D = 4 + 3i\sqrt{3}$$

التمرين الثاني : (4.5 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$

- (1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{1}{u_n - 1}$
- ب) برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 2$
- ج) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة
- (2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = e^{\frac{u_n}{u_n - 2}}$
- أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^2 يطلب تعيين حدها الأول
- ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- (3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $s_n = \ln\left(\frac{v_1}{e}\right)^{u_1} + \ln\left(\frac{v_1}{e}\right)^{u_2} + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{e}\right)^{u_n}$

التمرين الثالث : (4 نقاط)

U_1 و U_2 صندوقان متماثلان ، يحتوي U_1 على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء ، و الصندوق U_2 يحتوي على كرة حمراء و 5 كرات سوداء . (الكرات لا نفرق بينها عند اللمس).

(1) نسحب عشوائيا كرة من U_1 ، إذا كانت حمراء نعيدها لنفس الصندوق و نسحب عشوائيا كرة منه ، وإذا كانت سوداء نسحب عشوائيا كرة من U_2 .

(أ) احسب $p(A)$ احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من نفس اللون .

(ب) احسب $p(R)$ احتمال أن تكون الكرة الثانية المسحوبة حمراء .

(ج) احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية مسحوبة من الصندوق U_2 علما أنها حمراء.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

-عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي $E(X)$. (يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات)

التمرين الرابع : (7.5 نقاط)

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x^2 + 4x + 1 + \ln(x+1)$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2. بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.2 < \alpha < -0.3$.

3. عين حسب قيم إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = -2x + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$. وليكن (C) منحناها البياني

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(x'; y')$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

(3) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C) الموازي لـ (Δ) .

(4) أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين احدهما معدوم و الآخر β حيث $-0.3 < \beta < -0.4$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

(ب) أنشئ (C) و (Δ) و (T) . (تعطى $f(\alpha) = 0.2$)

(5) ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = -2x + m$

(6) أ) جد F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

(ب) احسب بدلالة β مساحة الحيز S من المستوي المحدد بـ (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين ذو المعادلتين $x = \beta$ و $x = 0$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

أجب بـ " صحيح " أو " خطأ " مع التبرير.

(1) الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية $y' + y + 1 = 0$ و الذي يحقق $y(\ln 2) = 0$ هو $y = -1 - 2e^{-x}$.

(2) كيس به كرتين سوداوين و $n+1$ كرة حمراء ($n \geq 2$) الكرات لا نفرق بينها باللمس.

نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس و نعتبر الحدث A : " سحب كرتين من نفس اللون " .

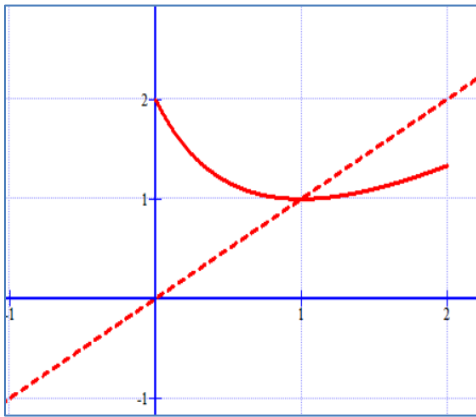
احتمال الحدث A : $P(A) = \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + 5n + 6}$.

(3) Z عدد مركب حيث $Z = 2i$ ، العدد Z^{2023} تخيلي صرف .

(4) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ : $f(x) = xe^{-x}$ ، القيمة المتوسطة للدالة على المجال $[0;1]$ هي :

$$m = 1 - \frac{2}{e}$$

التمرين الثاني : (5 نقاط)



نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ و

ليكن (C) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$. (انظر الشكل)

نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(1) أ) انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n) مبرزاً خطوط الانشاء .

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و استنتج تقاربها.

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{3}$ ثم استنتج أن $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$.

ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 6 كريات تحمل كل منها الرقم 1 ، منها 2 سوداء و 4 حمراء ، و 5 كريات تحمل كل منها الرقم 2 ، منها 3 سوداء و واحدة حمراء و واحدة خضراء .
نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق .
نعتبر الحدث A : " الكريات الثلاثة من نفس اللون " . و الحدث B : " الكريات الثلاث لها نفس الرقم " .
و الحدث C : " جداء أرقام الكرات الثلاثة عدد زوجي " .
(1) احسب احتمال الأحداث A ، B و C .

(ب) بين أن : $p(A \cap B) = \frac{1}{33}$ ثم استنتج $p_A(B)$ و $p(\overline{A \cup B})$.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المتحصل عليها .
- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي و أحسب أمله الرياضي $E(X)$ ثم استنتج $E(X + 2023)$.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^x - x + 2$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

(3) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$. وليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = e^{-x} g(x)$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3 < \alpha < 0.5$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

(6) أنشئ (Δ) و (C_f) .

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) - x = 1 + e^{-x} - f'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة $x \rightarrow f(x) - x$ على $\mathbb{R}$.

2. أحسب بدلالة α ، مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = \alpha$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المقترح للموضوع الأول

التمرين الأول :

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، لتكن C, B, A نقط لواحقها على الترتيب:
 $z_C = 4 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = 1 + i\sqrt{3}$. اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير.

(1) قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $(z_A)^n = (z_B)^n$:

$$\text{Arg}(z_A)^n = n \times \text{Arg}(z_A) = n \times \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \text{Arg}(z_B)^n = n \times \text{Arg}(z_B) = n \times \frac{-\pi}{3}$$

$$n \times \frac{\pi}{3} = n \times \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$$

$$n \times \frac{1}{3} = n \times \frac{-1}{3} + 2k$$

$$n = -n + 6k$$

$$2n = 6k$$

$$n = 3k$$



(2) العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023}$ يساوي :

$$\left|\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023}\right| = \left(\frac{|z_A|}{|z_B|}\right)^{2023} = \left(\frac{2}{2}\right)^{2023} = 1$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023} = 2023(\text{Arg}(z_A) - \text{Arg}(z_B)) = 2023\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{3}\right) = 2023\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4044\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

$$= 4044\frac{\pi}{3} = 1438\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023} = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(3) لاحقة مركز ثقل المثلث ABC هي :

$$\frac{Z_A + Z_A + Z_A}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} + 4 + i\sqrt{3}}{3} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

(4) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق :

$$|-z| = |\overline{z} - \overline{z_B}| \Rightarrow |z| = |\overline{z - z_B}| \Rightarrow |z| = |z - z_B| \Rightarrow OM = BM$$

محور القطعة $[OB]$

(5) لاحقة النقط D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع هي :

$$Z_D - Z_C = Z_A - Z_B$$

$$Z_D = Z_A - Z_B + Z_C = 4 + 3i\sqrt{3}$$

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$.

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{1}{u_n - 1}$.

$$3 - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{3(u_n - 1) - 1}{u_n - 1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1} = u_{n+1}$$

(1 ب) برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

$$u_0 = 3 > -2 : n = 0$$

$$(1) \quad u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2 \text{ و } u_n > 2$$

اذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 2$.

(ج) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 4u_n - 4}{u_n - 1} = \frac{-(u_n - 2)^2}{u_n - 1} < 0$$

(u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل اذن هي متقاربة .

(2 أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^2 يطلب تعيين حدها الأول .

$$v_{n+1} = e^{\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2} = \frac{\frac{3u_n-4}{u_n-1}}{\frac{3u_n-4}{u_n-1}-2} = \frac{\frac{3u_n-4}{u_n-1}}{\frac{3u_n-4-2(u_n-1)}{u_n-1}} = \frac{3u_n-4}{3u_n-4-2u_n+2} = \frac{3u_n-4}{u_n-2} = 2 + \left(\frac{3u_n-4}{u_n-2} - 2 \right) = 2 + \frac{u_n}{u_n-2}$$

$$v_{n+1} = e^{\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2}} = e^{2 + \frac{u_n}{u_n-2}} = e^2 \times e^{\frac{u_n}{u_n-2}} = e^2 v_n$$

$$v_0 = e^{\frac{u_0}{u_0-2}} = e^3 \text{ و حدها الأول } v_0 = e^3$$

(ب) أكتب v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = e^3 \times (e^2)^n = e^3 \times e^{2n} = e^{2n+3}$$

ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$v_n = e^{\frac{u_n}{u_n-2}} \Rightarrow \ln v_n = \ln e^{\frac{u_n}{u_n-2}} \Rightarrow \ln v_n = \frac{u_n}{u_n-2} \Rightarrow (u_n - 2) \ln v_n = u_n$$

$$\Rightarrow u_n \ln v_n - 2 \ln v_n = u_n \Rightarrow u_n (\ln v_n - 1) = 2 \ln v_n$$

$$u_n (\ln v_n - 1) = \frac{2 \ln v_n}{\ln v_n - 1} = \frac{2 \ln e^{3n+2}}{\ln e^{3n+2} - 1} = \frac{2(3n+2)}{3n+2-1} = \frac{6n+4}{3n+1}$$

(3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $s_n = \ln\left(\frac{v_0}{e}\right)^{u_0} + \ln\left(\frac{v_1}{e}\right)^{u_1} + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{e}\right)^{u_n}$.

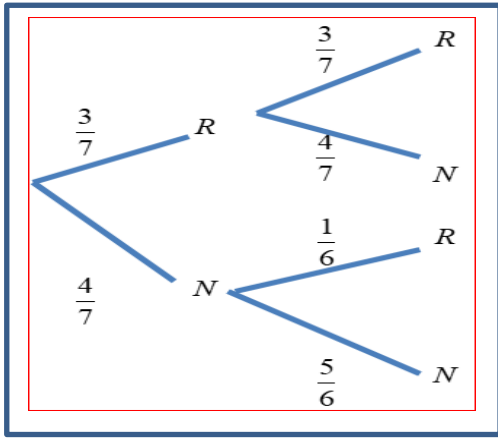
$$\ln\left(\frac{v_n}{e}\right)^{u_n} = u_n \ln\left(\frac{e^{3n+2}}{e}\right) = u_n \ln(e^{3n+2-1}) = u_n \ln(e^{3n+1}) = u_n (3n+1) = \frac{6n+4}{3n+1} (3n+1) = 6n+4$$

$$s_n = \frac{n+1}{2} (6n+4+4) = \frac{n+1}{2} (6n+10) = (n+1)(3n+5) : \text{ هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية}$$

التمرين الثالث :

U_1 صندوقان متماثلان ، يحتوي U_1 على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء ، و الصندوق U_2 يحتوي على كرة حمراء و 5 كرات سوداء . (الكرات لا نفرق بينها عند اللمس).

(1) نسحب عشوائيا كرة من U_1 ، إذا كانت حمراء نعيدها لنفس الصندوق و نسحب عشوائيا كرة منه ، وإذا كانت سوداء نسحب عشوائيا كرة من U_2 .



(أ) احسب $p(A)$ احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من نفس اللون .

$$p(A) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{97}{147}$$

(ب) احسب $p(R)$ احتمال أن تكون الكرة الثانية المسحوبة حمراء .

$$p(R) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{41}{147}$$

(ج) احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية مسحوبة من الصندوق U_2 علما أنها حمراء.

الأستاذ : بلجودي حمو

$$p_R(U_2) = \frac{p(U_2 \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{5}{6}}{\frac{41}{147}} = \frac{70}{41}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

$$X = \{0; 1; 2\}$$

$$p(X=2) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49} \quad p(X=1) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{50}{147} \quad p(X=0) = \frac{4}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{21}$$

- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي $E(X)$. (يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات)

$$E(X) = 0 \times \frac{10}{21} + 1 \times \frac{50}{147} + 2 \times \frac{9}{49} = \frac{170}{147}$$

التمرين الرابع :

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x^2 + 4x + 1 + \ln(x+1)$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

$$g'(x) = 4x + 4 + \frac{1}{x+1} = \frac{4(x+1)^2 + 1}{x+1} , \quad]-1; +\infty[\text{ من أجل كل } x$$

من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $g'(x) > 0$ ، وبالتالي فالدالة g متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$.

جدول تغيراتها:

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.3 < \alpha < -0.2$.
 g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ و من ثم على $[-0.3; -0.2]$ و لدينا $g(-0.3) = -0.37 < 0$ و $g(-0.2) = 0.056 > 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.3 < \alpha < -0.2$

الأستاذ : بلجودي حمو

3. عين حسب قيم إشارة $g(x)$.

تلخص في الجدول الموالي :

x	-1	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	$+$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = -2x + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x + \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_0 \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(-2x + \frac{1}{x+1} \ln(x+1) \right) = -\infty$$

تفسير النتيجة هندسيا: المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مستقيم مقارب عمودي.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$ ؛

$$f'(x) = \left(-2x + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right)' = -2 + \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} - 2$$

$$= \frac{1 - \ln(x+1) - 2x^2 - 4x - 2}{(x+1)^2} = \frac{-(2x^2 + 4x + 1 + \ln(x+1))}{(x+1)^2} = \frac{-g(x)}{(x+1)^2}$$

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

(2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2x + \frac{\ln(x+1)}{x+1} + 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

الأستاذ بلجودي حمو

(ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C) يقع فوق المستقيم (Δ)	(C) يقطع (Δ) في A(0;0)	(C) يقع تحت المستقيم (Δ)

(3) . اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C) الموازي لـ (Δ) .

$$f'(x) = -2 \Rightarrow \frac{-2x^2 - 4x - 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = -2 \Rightarrow -2x^2 - 4x - 1 - \ln(x+1) = -2(x+1)^2$$

$$\Rightarrow -2x^2 - 4x - 1 - \ln(x+1) = -2x^2 - 4x - 2 \Rightarrow \ln(x+1) = 1 \Rightarrow x = e - 1$$

$$(T): y = f'(e-1)(x - e + 1) + f(e-1)$$

$$\begin{cases} f'(e-1) = -2 \\ f(e-1) = -2e + 2 + \frac{1}{e} \end{cases}$$

$$(T): y = -2(x - e + 1) - 2e + 2 + \frac{1}{e}$$

$$(T): y = -2x + \frac{1}{e}$$



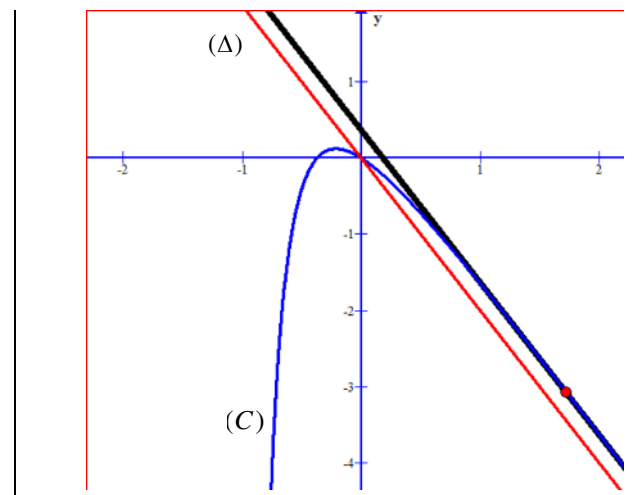
(4) أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين احدهما معدوم و الآخر β حيث $-0.4 < \beta < -0.3$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

المعادلة $f(0) = 0$; ومنه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا معدوما .

f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha[$ و من ثم على $[-0.4; -0.3]$ و لدينا $f(-0.4) = -0.05 < 0$ و $f(-0.3) = 0.09 > 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-0.4 < \beta < -0.3$.

(ب) أنشئ (C) و (Δ) و (T) . ($f(\alpha) = 0.2$)



(5) ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = -2x + m$

m	عدد و إشارة حلول المعادلة
$]-\infty; 0[$	حل سالب .
0	حل معدوم
$]0; \frac{1}{e}[$	حليين موجبين
$\frac{1}{e}$	حل معدوم
$m > \frac{1}{e}$	لا توجد حلول

(6) أ) جد F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

$$\int f(x)dx = \int -2x dx + \int \frac{1}{x+1} \ln(x+1) dx = -x^2 + \frac{1}{2} (\ln(x+1))^2$$

$$F(x) = -x^2 + \frac{1}{2} (\ln(x+1))^2 + c$$

ب) احسب بدلالة β مساحة الحيز S من المستوي المحدد بـ (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=\beta$.

$$\int_{\beta}^0 f(x)dx = \left[-x^2 + \frac{1}{2} (\ln(x+1))^2 \right]_{\beta}^0 = -\beta^2 + \frac{1}{2} (\ln(\beta+1))^2 \quad u.s$$

انتهي تصحيح الموضوع الأول

الأستاذ : بلجودي حمو

الأستاذ بلجودي حمو

التصحيح المقترح للموضوع الثاني

التمرين الأول :

(1) الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية $y' + y + 1 = 0$ و الذي يحقق $y(\ln 2) = 0$ هو $y = -1 - 2e^{-x}$ خطأ . لأن الحل لا يحقق $y(\ln 2) = 0$.

تبرير اخر : إيجاد الحل الخاص $y = 2e^{-x} - 1$.

(2) احتمال الحدث A : $P(A) = \frac{C_2^2 + C_{n+1}^2}{C_{n+3}^2} = \frac{1 + \frac{(n+1)n}{2}}{(n+3)(n+2)} = \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + 5n + 6}$ صحيح .

(3) عدد مركب حيث $Z = 2i$ ، العدد تخيلي صرف . صحيح لأن $Arg(z)^{2023} = -\frac{\pi}{2}$
 $Z^{2023} = \left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2023} = \left(2^{2023} \times e^{i\frac{2023\pi}{2}}\right) = 2^{2023} \times e^{i\left(\frac{2024\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} = 2^{2023} \times e^{i\left(1012\pi - \frac{\pi}{2}\right)} = 2^{2023} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

الأستاذ : بلجودي حمو

(4) القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;1]$ هي $m = 1 - \frac{2}{e}$ صحيح .

$$m = \frac{1}{1-0} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x e^{-x} dx = \left[(-x-1)e^{-x} \right]_0^1 = -2e^{-1} - (-1) = 1 - \frac{2}{e}$$

التمرين الثاني :

(1) أ) مثل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى:

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

نلاحظ أن المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو 1 ،

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$.

$$n=0 : 1 < u_0 = 2 \leq 2$$

$1 < u_n \leq 2$ و f متزايدة على المجال $[1;2]$ و منه $f(1) < f(u_n) \leq f(2)$ و

منه $1 < u_{n+1} \leq \frac{4}{3} \leq 2$ اذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد

طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$.

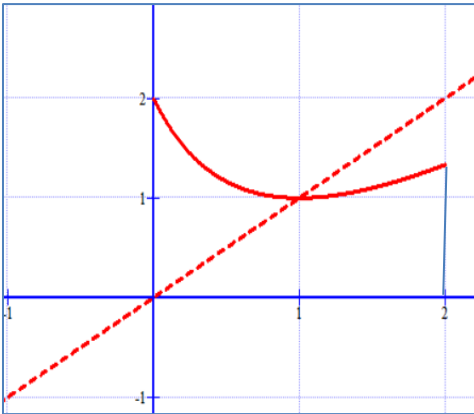
ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و استنتج تقاربها .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n + 1}{u_n + 1}$$

لدينا $-u_n + 1 < 0$ و $u_n + 1 > 0$ اذن $u_{n+1} - u_n < 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماماً .

المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

الأستاذ بلجودي حمو



(3 أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 1} - 1 = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$$

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{3}$.

من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$ و منه $2 < u_n + 1 \leq 3$ و منه $-1 < \frac{-2}{u_n + 1} \leq \frac{-2}{3}$ و منه $0 < 1 - \frac{12}{u_n + 1} \leq \frac{1}{3}$.

الأستاذ : بلجودي حمو

ثم استنتج أن $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$.

لدينا $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1} = \frac{(u_n - 1)}{u_n + 1}(u_n - 1)$ و $0 < \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{3}$ و منه : $0(u_n - 1) < \frac{(u_n - 1)}{u_n + 1}(u_n - 1) \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$ أي $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$.

(ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$ و منه $0 < u_1 - 1 \leq \frac{1}{3}(u_0 - 1)$ و $0 < u_2 - 1 \leq \frac{1}{3}(u_1 - 1)$ و و $0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{3}(u_{n-1} - 1)$.

بضرب المتباينات طرفا لطرف : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (u_0 - 1)$ أي $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ و منه : $1 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1$ لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 = 1$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

التمرين الثالث :

(1 أ) احسب احتمال الأحداث A ، B و C .

$$p(C) = \frac{C_5^3 + C_5^2 \times C_6^1 + C_5^1 \times C_6^2}{C_{11}^3} = \frac{29}{33}$$

$$p(B) = \frac{C_6^3 + C_5^3}{C_{11}^3} = \frac{2}{11}$$

$$p(A) = \frac{C_5^3 + C_5^3}{C_{11}^3} = \frac{4}{33}$$

(ب) بين أن : $p(A \cap B) = \frac{1}{33}$ ثم استنتج $p_A(B)$ و $p(\overline{A \cup B})$.

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{1}{4}$$

$$p(A \cap B) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_{11}^3} = \frac{1}{33}$$

$$p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = \frac{8}{11}$$

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المتحصل عليها .

- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي و احسب أماله الرياضياتي $E(X)$ ثم استنتج $E(X + 2023)$.

$$X = \{1; 2; 3\}$$

$$p(X=2) = 1 - \frac{5}{33} - \frac{4}{33} = \frac{8}{11} \quad p(X=3) = \frac{C_5^1 \times C_5^1 \times C_1^1}{C_{11}^3} = \frac{5}{33} \quad p(X=1) = p(A) = \frac{4}{33}$$

$$E(X+2023) = E(X) + 2023 = \frac{66826}{33} \quad E(X) = \frac{1 \times 4 + 2 \times 24 + 3 \times 5}{33} = \frac{67}{33}$$

التمرين الرابع :

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = e^x - x + 2$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

$$g'(x) = e^x - 1$$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow +\infty$

(3) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ بـ $g(x) \geq 3 > 0$ و منه $g(x) > 0$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + xe^{-x} - e^{-x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + (x-1)e^{-x} = -\infty$$

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

$$f'(x) = 1 + e^{-x} - e^{-x}(x-1) = 1 + e^{-x} - e^{-x}x + e^{-x} = 1 + 2e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(-x + 2 + e^x) = e^{-x}g(x)$$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x) \geq 0$ اذن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) (أ) بين أن المستقيم $y = x$ ذو المعادلة (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} - e^{-x} = 0$$

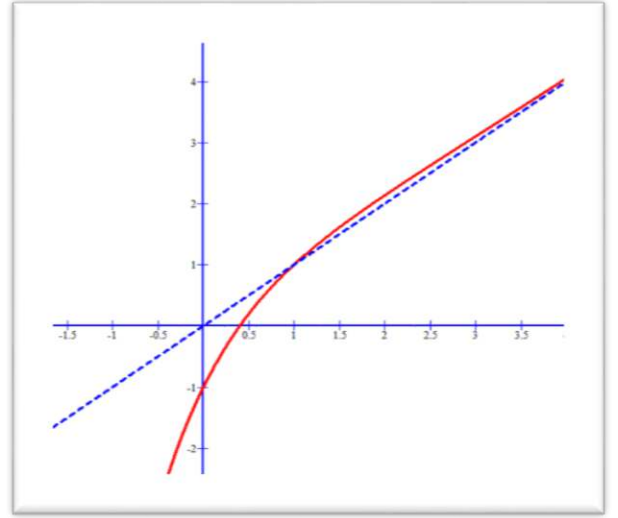
(ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

$$f(x) - x = (x-1)e^{-x}$$

الأستاذ بلجودي حمو

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C) تحت (Δ)	(C) يفتح (Δ)	(C) فوق (Δ)

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3 < \alpha < 0.5$ ثم فسر النتيجة هندسيا .
م.ق.م α هي فاصلة نقطة التقاطع مع محور الفواصل .
(6) أنشئ (Δ) و (C_f)



1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) - x = 1 + e^{-x} - f'(x)$

$$f(x) - x = x + (x-1)e^{-x} - x = (x-1)e^{-x}$$

$$1 + e^{-x} - f'(x) = 1 + e^{-x} - (-xe^{-x} + 2e^{-x} + 1) = xe^{-x} - e^{-x} = (x-1)e^{-x}$$

ثم استنتج دالة أصلية للدالة $x \rightarrow f(x) - x$ على $\mathbb{R}$.

$$\int (f(x) - x) dx = \int (1 + e^{-x} - f'(x)) dx = x - e^{-x} - f(x) = x - e^{-x} - x - (x-1)e^{-x} = -xe^{-x}$$

2. أحسب بدلالة α ، مساحة الحيز :

$$s = \int_1^\alpha (f(x) - x) dx = \int_1^\alpha (-xe^{-x}) dx = e^{-1} - \alpha e^{-\alpha} \quad \text{us.}$$

انتهى الموضوع الثاني

وفقكم الله في بكالوريا

2025

الأستاذ بلجودي حمو