

إختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (6 نقاط)

توجد إجابة واحدة صحيحة لكل حالة حددها مع التعليل

0	1	$+\infty$	1. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(e^{-3x} + 1)$
لا تقبل أي حل	حلان	حل واحد	2. تقبل المعادلة $2 \ln x = \ln 2x$ في $\mathbb{R}$:
6470	6475	6476	3. عدد أرقام العدد 1606^{2020} هو:
$f(x) = -e^{-2x} + 1$	$f(x) = -e^{-2x} - 1$	$f(x) = e^{-2x} - 1$	4. حل المعادلة التفاضلية $y' + 2y - 2 = 0$ و الذي يحقق $f(0) = 0$ هو الدالة f حيث:
$\mathbb{R}$	$[1; +\infty[$	$] -\infty; 0]$	5. مجموعة حلول المتراجحة $e^x - e^{-x} \leq 0$ هي :
$x = 2$	$x = -1$	$x = 1$	6. معادلة محور تناظر منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = x^2 - 2x - \ln(x-1)^2$ هي :

التمرين الثاني: (7 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x فان : $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.
 ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) .
 ج) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (D) .
- (2) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x فان : $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.
 ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم بين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) .
 ج) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (D') .
- (3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- (4) أرسم (D) ، (D') و (C_f) .
- (5) لتكن (Δ_m) عائلة المستقيمات التي معادلاتها من الشكل $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1-m)$ حيث m وسيط حقيقي.
 أ) بين أن جميع هذه المستقيمات تشمل نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثيها.
 ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx + \frac{\ln 2}{2}(1-m)$.

التمرين الثالث: (7 نقاط)

(I)

الشكل المقابل يمثل المنحنى (C_g) للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ والمماس (T) عند مبدأ المعلم.

(1) أوجد قيمة كل من: $g'(-1)$ ،

$g(0)$ و $g'(0)$

(2) أوجد معادلة للمماس (T) .

(3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $g'(x) \geq 0$.

(4) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل

حليين مختلفين احدهما معدوم والآخر

نسميه α حيث يحقق:

. $-1,75 < \alpha < -1,50$

(5) استنتج إشارة $g(x)$.

(6) أوجد العددين الحقيقيين a و b

بحيث: $g(x) = (ax + b)e^{-x} - 2$.

(II)

الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$

بـ: $f(x) = (-x - 3)e^{-x} - 2x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم

المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب نهايات $f(x)$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فان: $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) .

(4) بين أن $f(\alpha) = -2 \left(\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 2} \right)$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(5) أوجد قيمة العدد الحقيقي β حتى يكون المستقيم (T') ذو المعادلة $y = \beta x - e$ مماسا خارقا لـ: (C_f) .

(6) أرسم (Δ) و (C_f) .

(7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

Bonis (+1)

أحسب النهاية التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

بالتوفيق للجميع

التصحيح النموذجي للاختبار:

تصحيح التمرين الأول:

(1) أختار: "0".

التبرير: $f(e^{-3x} + 1) = (f \circ u)(x)$ حيث $u(x) = e^{-3x} + 1$ حسب خاصية نهاية دالة مركبة

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(e^{-3x} + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (f \circ u)(x) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ اذن لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-3x} + 1) = 1$$

(2) أختار: "حل واحد".

التبرير: هذه المعادلة معرفة لما $x > 0$ أي $D_E =]0; +\infty[$ لدينا $2 \ln x = \ln 2x$ ومنه $\ln x^2 = \ln 2x$ ومنه $x^2 = 2x$ ومنه

$$x(x-2) = 0 \text{ ومنه إما } x = 0 \text{ أو } x = 2 \text{ لكن } 0 \text{ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى مجموعة تعريف المعادلة} \dots\dots\dots$$

(3) أختار: "6476".

التبرير: $\log(1606^{2020}) = 2020 \log 1606 \simeq 6475,61$ ومنه $E[\log(1606^{2020})] = 6475$ ومنه حسب تعريف دالة الجزء الصحيح نجد

$$6475 \leq \log(1606^{2020}) < 6476 \text{ ومنه } 10^{6475} \leq 10^{\log(1606^{2020})} < 10^{6476} \text{ ومنه } 10^{6475} \leq 1606^{2020} < 10^{6476} \text{ منه عدد ارقام } 1606^{2020} \text{ هو } 6476 \dots\dots\dots$$

(4) أختار: " $-e^{-2x} + 1$ ".

التبرير: لدينا $y' + 2y - 2 = 0$ ومنه $y' = -2y + 2$ أي $a = -2$ و $b = 2$ والحل لعام لهذه المعادلة التفاضلية هو الدوال المعرفة:

$$f(x) = ce^{-2x} - \frac{2}{-2} \text{ أي } f(x) = ce^{-2x} + 1 \text{ ولدينا } f(0) = 0 \text{ ومنه نجد } c = -1 \text{ اذن الحل المطلوب هو } f(x) = -e^{-2x} + 1 \dots\dots\dots$$

(5) أختار: " $]-\infty; 0]$ ".

التبرير: لدينا $e^x - e^{-x} \leq 0$ ومنه $e^x \leq e^{-x}$ ومنه $x \leq -x$ ومنه $2x \leq 0$ ومنه $x \leq 0$ أي $x \in]-\infty; 0]$ $\dots\dots\dots$

(6) أختار: " $x = 1$ ".

التبرير: لدينا بصفة عامة محور تناظر منحنى ان وجد فان معادلته من الشكل $x = a$ ويحقق $f(2a - x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} f(2a - x) &= (2a - x)^2 - 2(2a - x) - \ln(2a - x - 1)^2 \\ &= 4a^2 - 4ax + x^2 - 4a + 2x - \ln[-(x - 2a + 1)]^2 \\ &= x^2 + (-4a + 2)x - \ln[x - (2a - 1)]^2 + 4a^2 - 4a \end{aligned}$$

$$\text{ومنه } f(2a - x) = f(x) \text{ تعني } \begin{cases} -4a + 2 = -2 \\ 2a - 1 = 1 \\ 4a^2 - 4a = 0 \end{cases} \text{ وحل هذه الجملة الوحيد هو } a = 1 \text{ اذن المعادلة المطلوبة هي } x = 1 \dots\dots\dots$$

تصحيح التمرين الثاني:

(1) أثبات انه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$

$$\text{لدينا } f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln e^x (1 + 2e^{-2x}) = \ln e^x + \ln(1 + 2e^{-2x}) = x + \ln(1 + 2e^{-2x}) \dots\dots\dots$$

$$\text{ب) حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \ln(1 + 2e^{-2x})] = +\infty \dots\dots\dots$$

- تبيان ان $y = x$: (D) مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \ln(1 + 2e^{-2x}) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + 2e^{-2x})] = \ln 1 = 0 \text{ ومنه (D) مقارب مائل بجوار } +\infty \dots\dots\dots$$

ج) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (D) : ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y = x + \ln(1 + 2e^{-2x}) - x = \ln(1 + 2e^{-2x})$ لدينا

$$2e^{-2x} > 0 \text{ دوماً ومنه } 1 + 2e^{-2x} > 1 \text{ ومنه } \ln(1 + 2e^{-2x}) > \ln 1 \text{ أي } f(x) - y > 0 \text{ دوماً ومنه } (C_f) \text{ فوق (D) دوماً} \dots\dots\dots$$

(2) أثبات انه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$

$$\text{لدينا } f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln e^{-x} (e^{2x} + 2) = \ln e^{-x} + \ln(2 + e^{2x}) = -x + \ln(2 + e^{2x}) \dots\dots\dots$$

$$\text{ب) حساب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + \ln(2 + e^{2x})] = +\infty \dots\dots\dots$$

- تبيان ان $y = -x + \ln 2$: (D') مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + \ln(2 + e^{2x}) + x - \ln 2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(2 + e^{2x}) - \ln 2] = \ln 2 - \ln 2 = 0 \text{ ومنه (D') مقارب مائل عند } +\infty \dots\dots\dots$$

(ج) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (D') : ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y = -x + \ln(2 + e^{2x}) + x - \ln 2 = \ln(2 + e^{2x}) - \ln 2$: لدينا $e^{2x} > 0$ دوماً ومنه $2 + e^{2x} > 2$ ومنه $\ln(2 + e^{2x}) > \ln 2$ أي $f(x) - y > 0$ دوماً ومنه (C_f) فوق (D') دوماً.....
(3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}} = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^{2x} - 2}{e^{2x} + 2}$: نلاحظ ان إشارة المقام موجبة تماماً ودوماً اذن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة البسط أي من نفس إشارة $e^{2x} - 2$.

- إشارة $e^{2x} - 2$: $e^{2x} - 2 = 0$ ومنه $e^{2x} = 2$ ومنه $2x = \ln 2$ أي $x = \frac{\ln 2}{2}$ ، $e^{2x} - 2 > 0$ ومنه نجد $x > \frac{\ln 2}{2}$ و

x	$-\infty$	$\ln 2 / 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

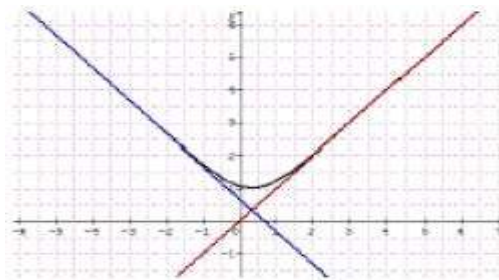
$e^{2x} - 2 < 0$ ومنه نجد $x < \frac{\ln 2}{2}$ وعليه تكون إشارة $f'(x)$:

ومنه نستنتج ان f متزايدة على $[\ln 2 / 2; +\infty[$ ومتناقصة على $]-\infty; \ln 2 / 2]$

x	$-\infty$	$\ln 2 / 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$\frac{3 \ln 2}{2}$	$+\infty$

جدول التغيرات:

(4) الرسم :



(5) أ) تبين ان جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة A وتعيين احداثيها:

لدينا $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$ ومنه $y = mx + \frac{\ln 2}{2} - m \frac{\ln 2}{2}$ ومنه $y - mx - \frac{\ln 2}{2} + m \frac{\ln 2}{2} = 0$ ومنه

$y - \frac{\ln 2}{2} + m \left(\frac{\ln 2}{2} - x \right) = 0$ وتكون هذه المعادلة محققة بغض النظر عن اية قيمة للوسيط الحقيقي m اذا كان :

..... $A \left(\frac{\ln 2}{2}; \frac{\ln 2}{2} \right)$ تشمل نقطة ثابتة (Δ_m) وعليه فان جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة $A \left(\frac{\ln 2}{2}; \frac{\ln 2}{2} \right)$ ومنه نجد $\begin{cases} y = \frac{\ln 2}{2} \\ x = \frac{\ln 2}{2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y - \frac{\ln 2}{2} = 0 \\ \frac{\ln 2}{2} - x = 0 \end{cases}$

(ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x) = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$: ان حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني

(C_f) مع عائلة المستقيمات التي معادلاتها $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$ والتي تشمل كلها النقطة $A \left(\frac{\ln 2}{2}; \frac{\ln 2}{2} \right)$ اذن هنا المناقشة

تكون دورانية وحسب الشكل السابق نجد:

* اذا كان $m = 1$ فان (Δ_m) هي المستقيم المقارب (D) وليس هناك أي حل للمعادلة المنحني لا يتقاطع مع المستقيم المقارب.

* اذا كان $m = -1$ فان (Δ_m) هي المستقيم المقارب (D') أيضاً ليس هناك أي حل للمعادلة المنحني لا يتقاطع مع المستقيم المقارب .

* اذا كان $m \in [-1; 1]$ أيضاً حسب الشكل ليس هناك أي حل للمعادلة أي عدم وجود نقط تقاطع.

* اذا كان $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ فحسب الشكل هناك نقطة مشتركة وحيدة بين (Δ_m) و (C_f) أي للمعادلة حل وحيد.....

تصحيح التمرين الثالث:

- (I) 1 من الشكل نجد: $g(0) = 0$ ، $g'(0) = -1$ ، $g'(-1) = 0$
 2 معادلة المماس (T) : $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$ ومنه نجد $y = -x$
 3 حلول المتراجحة $g'(x) \geq 0$ هي القيم التي تكون عندها الدالة g متزايدة وحسب الشكل نجد $S =]-\infty; -1]$
 4 من خلال الشكل يتبين ان المنحني يقطع محور الفواصل في نقطتين احدهما المبدأ والأخرى فاصلتها α . بما ان الدالة مستمرة على المجال $[-1, 50; -1, 75]$ ومتزايدة تماما عليه وأيضا حسب الشكل نجد $g(-1, 50) \simeq 0, 25$ و $g(-1, 75) \simeq -0, 5$ أي
 5 إشارة $g(x)$: حسب الشكل نجد : $g(-1, 50) \times g(-1, 75) < 0$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان حل المعادلة $g(x) = 0$ يحقق $-1, 75 < \alpha < -1, 50$...

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$		-	0	+

- 6 إيجاد a و b حيث $g(x) = (ax + b)e^{-x} - 2$:
 لدينا $g(0) = 0$ ومنه نجد $g(0) = (a \times 0 + b)e^{-0} - 2 = 0$ ومنه نجد $b = 2$
 أيضا $g'(0) = -1$: لنا $g(x) = (ax + b)e^{-x} - 2$ ومنه $g'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}$ ومنه
 $g'(0) = ae^{-0} - (a \times 0 + b)e^{-0} = -1$ ومنه نجد $a = 1$ وعليه $g(x) = (x + 2)e^{-x} - 2$
 (II) $f(x) = (-x - 3)e^{-x} - 2x$ ، $D_f =]-\infty; +\infty[$:
 1 حساب نهايات $f(x)$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(-x - 3)e^{-x} - 2x] = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-xe^{-x} - 3e^{-x} - 2x] = -\infty$
 2 التحقق ان $f'(x) = g(x)$: لدينا $f(x) = (-x - 3)e^{-x} - 2x$ ومنه
 $f'(x) = -e^{-x} - (-x - 3)e^{-x} - 2 = [-1 - (-x - 3)]e^{-x} - 2 = [x + 2]e^{-x} - 2 = g(x)$
 من نفس إشارة $g(x)$ ومنه f متزايدة على المجال $[\alpha; 0]$ ومتناقصة على كل من المجالين $]-\infty; \alpha]$ ، $[0; +\infty[$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	-3	$3 \frac{\ln 2}{2}$

جدول تغيرات الدالة f :

- 3 أ) تبيان ان $y = -2x$: (Δ) مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$:
 ... $+\infty$ في جوار $+\infty$: (C_f) مقارب لـ (Δ) اذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x - 3)e^{-x} - 2x + 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x - 3)e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x}{e^x} - \frac{3}{e^x} \right] = 0$
 ب) دراسة الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) : ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$: نجد $f(x) - y = (-x - 3)e^{-x}$ وبما ان $e^{-x} > 0$ دوما اذن إشارة الفرق من إشارة $-x - 3$ أي :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$-x - 3$		+	-
$f(x) - y$		+	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ) (Δ) يقطع (C_f) (C_f) تحت (Δ)		

(4) تبيان ان $f(\alpha) = -2\left(\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 2}\right)$ **ثم استنتاج حصرا له:**

لدينا α هل حل للمعادلة $g(x) = 0$ ومنه $g(\alpha) = 0$ ومنه $(\alpha + 2)e^{-\alpha} - 2 = 0$ ومنه $e^{-\alpha} = \frac{2}{\alpha + 2}$

لدينا $f(x) = (-x - 3)e^{-x} - 2x$ ومنه $f(\alpha) = (-\alpha - 3)e^{-\alpha} - 2\alpha$ بالتعويض نجد

$$f(\alpha) = (-\alpha - 3)\frac{2}{\alpha + 2} - 2\alpha = \frac{-2\alpha - 6}{\alpha + 2} - 2\alpha = \frac{-2\alpha - 4 - 2}{\alpha + 2} - 2\alpha = \frac{-2\alpha - 4}{\alpha + 2} - \frac{2}{\alpha + 2} - 2\alpha$$

$$= \frac{-2(\alpha + 2)}{\alpha + 2} - \frac{2}{\alpha + 2} - 2\alpha = -2 - \frac{2}{\alpha + 2} - 2\alpha = -2\left(\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 2}\right)$$

- **حصر** $f(\alpha)$: لدينا $-1,75 < \alpha < -1,50$ ومنه $0,25 < \alpha + 2 < 0,50$ ومنه $\frac{1}{0,5} < \frac{1}{\alpha + 2} < \frac{1}{0,25}$ أي

$$(2)..... -1,75 < \alpha < -1,50 \text{ ، } (1)..... 3 < 1 + \frac{1}{\alpha + 2} < 5 \text{ ومنه } 2 < \frac{1}{\alpha + 2} < 4$$

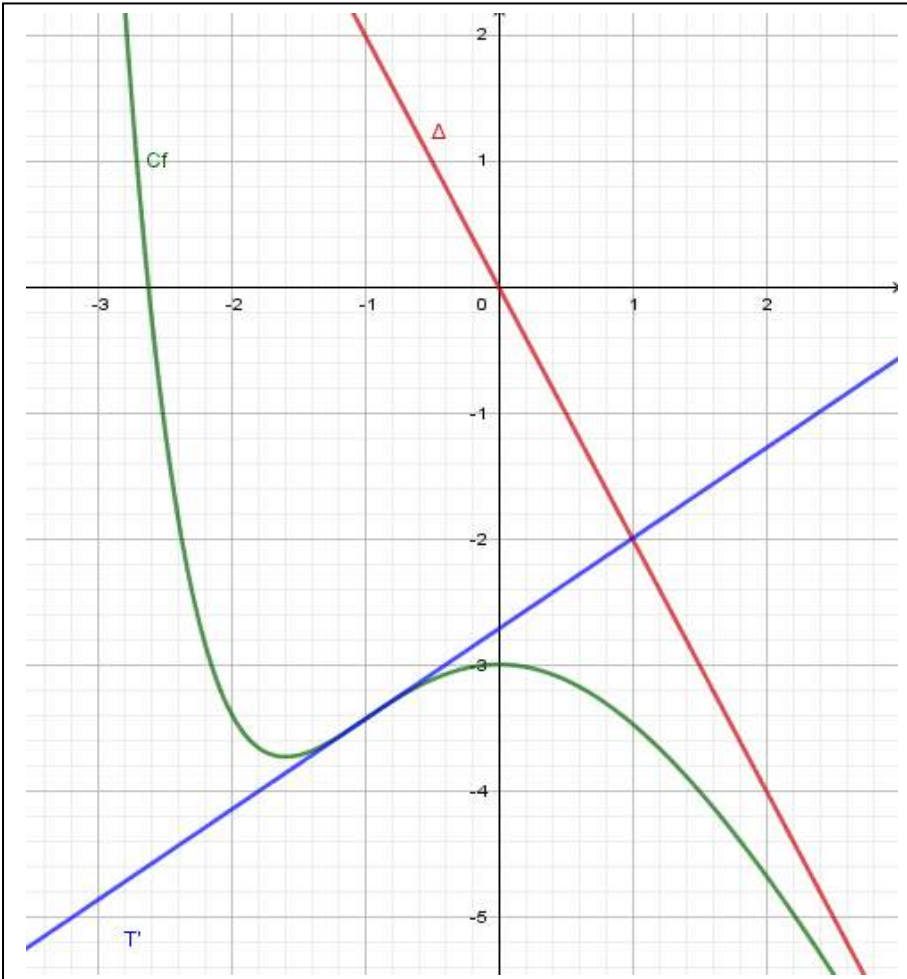
بالجمع نجد $2,25 < \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 2} < 3,5$ ومنه $-7 < -2\left(\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 2}\right) < -4,5$ أي $-7 < f(\alpha) < -4,5$

(5) إيجاد قيمة β : وجدنا سابقا ان الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x) = g(x)$ ومنه $f''(x) = g'(x)$ ووجدنا قبلها ان $g'(x)$ تنعدم عند -1 وتغير اشارتها وعليه نستنتج ان $f''(x)$ تنعدم عند -1 وتغير اشارتها وبالتالي النقطة التي فاصلتها -1 هي نقطة انعطاف للمنحني (C_f) وهي التي يكون عندها المماس خارجا للمنحني .

كتابة معادلة لهذا المماس: $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ ومنه $y = (e - 2)(x + 1) - 2e + 2 = (e - 2)x - e$ أي

..... $\beta = e - 2$ وهي معادلة للمماس (T') و $\beta = e - 2$

(6) رسم (Δ) و (C_f) :



(7) المناقشة البيانية :

حلل المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط

تقاطع (C_f) مع المستقيم الافقي الذي

معادلته $y = m$ ومنه حسب الشكل نجد:

• لما $m \in]-\infty; f(\alpha)[$ فان

للمعادلة حل وحيد.

• لما $m = f(\alpha)$ او $m = -3$

فان للمعادلة حلين.

• لما $m \in]f(\alpha); -3[$ فان

للمعادلة ثلاث حلول.

• لما $m \in]-3; +\infty[$ فان

للمعادلة حل وحيد.

انتهى.