

موضوع تدريبي رقم 3 (لشعبة علوم)

التحريز الأول (4ن):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}n + 4$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq n + 20$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - n - 15$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n = -10\left(\frac{4}{5}\right)^n + n + 15$.

(4) أحسب بدلالة n المجموعين T_n و S_n بحيث: $T_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}$ و $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{2n}$.

التحريز الثاني (4ن):

يحتوي صندوق على خمس كريات حمراء و أربع كريات بيضاء وثلاث كريات خضراء. (لا يمكن التمييز بينها باللمس).
نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

(1) نعتبر الأحداث التالية:

A: "سحب ثلاث كريات حمراء"

B: "سحب ثلاث كريات من نفس اللون"

C: "سحب كرية خضراء واحدة على الأقل"

أحسب: $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب، عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس.

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضي.

التحريز الثالث (5ن):

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 - 10z + 34 = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A، B و C النقط من المستوي المركب لواحقتها على الترتيب: $z_A = 2$ ، $z_B = 5 + 3i$ و $z_C = \overline{z_B}$.

(1) أ- أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC.

ج- عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

(2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث: $z' = (1+i)z - 2i$.

أ- عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

ب- عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالتشابه المباشر S.

ج- ما نوع الرباعي ACBD.

(3) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$.

عين طبيعة (E) وعناصرها المميزة.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 2 + e^{-2x} - e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ- بين المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x - 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$.

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها .

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α ، β حيث : $-0.8 < \alpha < -0.9$ و $2.1 < \beta < 2.2$.

(6) عين إحداثيي النقطة A من المنحنى (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (Δ) . أكتب معادلة (T) .

(7) أحسب $f(-1)$ ، ثم أنشئ كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) .

(8) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = x - m$.

“The only way to learn mathematics is to do mathematics”

تصحيح مقترح للموضوع

تصحيح مقترح للتمرين الأول :

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ : } \begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}n + 4 \end{cases}$$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq n + 20$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq n + 20$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 5$ ومنه $u_0 \leq 0 + 20$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n \leq n + 20$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \leq n + 21$.

لدينا حسب الفرض $u_n \leq n + 20$ ومنه $\frac{4}{5}u_n \leq \frac{4}{5}n + 16$ ومنه $\frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}n + 4 \leq n + 20$ أي $\frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}n + 4 \leq n + 20$

أي $u_{n+1} \leq n + 21$. وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n + 20$.

(2) تبين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}n + 4 - u_n = \left(\frac{4}{5} - 1\right)u_n + \frac{1}{5}n + 4 = -\frac{1}{5}(u_n - n - 20)$:

ولدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n + 20$ ومنه $u_n - n - 20 \leq 0$ وبالتالي : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - n - 15$ ،

أ- تبين أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 15 = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}n + 4 - n - 16 = \frac{4}{5}u_n - \frac{4}{5}n - 12 = \frac{4}{5}(u_n - n - 15) = \frac{4}{5}v_n$$

ومن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{4}{5}$ وحدها الأول : $v_0 = u_0 - 15 = -10$.

ب- كتابة v_n بدلالة n : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 \times q^n$ ، ومنه $v_n = -10 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - n - 15$ ، ومنه $u_n = v_n + n + 15$ أي : $u_n = -10 \left(\frac{4}{5}\right)^n + n + 15$.

(4) حساب المجاميع : بدلالة n المجموعين S_n و T_n بحيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{2n}$ و $T_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}$.

من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{2n} = v_n \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = v_n \left(\frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{5}} \right) = -50 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \right)$.

و $T_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n} = S_n + (n+1) \left(\frac{3}{2}n + 15 \right)$.

تصحيح مقترح للتمرين الثاني :

عدد السحبات الممكنة : $C_{12}^3 = 220$.

(1) حساب احتمالات الأحداث :

$$P(C) = \frac{C_3^1 + C_3^2 + C_3^3}{220} = \frac{7}{220} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3 + C_3^3}{220} = \frac{15}{220}, \quad P(A) = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220}$$

(2) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ، عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس .

قيم المتغير العشوائي X هي : $X \in \{1; 2; 3; 4\}$.

$$P(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_8^2}{220} = \frac{112}{220}, \quad P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_8^1}{220} = \frac{48}{220}, \quad P(X=1) = \frac{C_4^3}{220} = \frac{4}{220}$$

$$P(X=4) = \frac{C_8^3}{220} = \frac{56}{220}$$

X_i	1	2	3	4
$P(X = X_i)$	$\frac{4}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{56}{220}$

حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = 1 \times \frac{4}{220} + 2 \times \frac{48}{220} + 3 \times \frac{112}{220} + 4 \times \frac{56}{220} = \frac{660}{220} = 3$$

تصحيح مقترح للتمرين الثالث :

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 - 10z + 34 = 0$.

لدينا : $\Delta = -36 = (6i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{10+6i}{2} = 5+3i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{10-6i}{2} = 5-3i$$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، B و C النقطة من المستوي المركب لواحقتها على الترتيب : $z_A = 2$ ، $z_B = 5+3i$ و $\overline{z_C} = \overline{z_B}$

(1) أ- كتابة العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري والشكل الأسّي :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{5+3i-2}{5-3i-2} = \frac{3+3i}{3-3i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب- إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} AB = AC \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \text{ يكافئ } \frac{\pi}{2} \quad \text{لدينا : } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ يكافئ}$$

وبالتالي المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين .

ج- تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$z_G = \frac{z_C + z_B + z_A}{3} = \frac{5-3i+5+3i+2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

(2) S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث: $z' = (1+i)z - 2i$

أ- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

لدينا: $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$ وزاوية له هي $\frac{\pi}{4}$ ، ومركزه النقطة اللاحقة $2 = \frac{-2i}{1-(1+i)}$

أي أن مركز التشابه S هو النقطة A .

ب- تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالتشابه المباشر S .

$$z_D = (1+i)z_B - 2i = (1+i)(5+3i) - 2i = 5+3i+5i-3-2i = 2+6i$$

ج- تحديد نوع الرباعي $ACBD$:

لدينا: $z_{\overline{AD}} = z_D - z_A = 2+6i-2 = 6i$ و $z_{\overline{CB}} = z_B - z_C = 5+3i-(5-3i) = 6i$ ومنه $\overline{AD} = \overline{CB}$

وبالتالي الرباعي $ACBD$ متوازي أضلاع.

$$(E) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي التي تحقق: } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$$

تحديد طبيعة (E) وعناصرها المميزة:

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$ تكافئ $\|3\overrightarrow{MG}\| = 12$ أي $MG = 4$ وبالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 4.

تصحيح مقترح للتمرين الرابع:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 2 + e^{-2x} - e^{-x}$

(1) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} (xe^x - 2e^x + e^{-x} - 1) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(2) أ- لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} (e^{-x} - 1) = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = x - 2$ مقارب مائل

للمنحنى (C_f) عند $+\infty$:

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا: $f(x) - x - 2 = e^{-2x} - e^{-x} = e^{-x} (e^{-x} - 1)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(e^{-x} - 1)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		+	-

المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $]-\infty; 0[$.

المنحنى (C_f) يقع تحت (Δ) في المجال $[0; +\infty[$.

المنحنى (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $O(0;0)$

(3) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 1 - 2e^{-2x} + e^{-x} = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$

ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1 - e^{-x})$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty; 0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

(4) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف مع تعيين إحداثيها :

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = 4e^{-2x} - e^{-x} = e^{-x}(4e^{-x} - 1)$ ، إشارة $f''(x)$ من إشارة $(4e^{-x} - 1)$:

x	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

إذن النقطة $\omega \left(\ln 4; \ln 4 - \frac{35}{16} \right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

(5) تبين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α ، β حيث : $-0.9 < \alpha < -0.8$ و $2.1 < \beta < 2.2$.

• الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و $]-\infty; 0[\subset]-0.9; -0.8[$ و $f(-0.9) \approx 0,7$ و $f(-0.8) \approx -0,07$

أي $0 < f(-0.9) \times f(-0.8) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; 0[$ حلا وحيدا α ، حيث $-0.9 < \alpha < -0.8$.

• الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و $]0; +\infty[\subset]2.1; 2.2[$ و $f(2.1) \approx -0,007$ و $f(2.2) \approx 0,10$

أي $0 < f(2.1) \times f(2.2) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; +\infty[$ حلا وحيدا β ، حيث $2.1 < \beta < 2.2$.

(6) تعيين إحداثي النقطة A من المنحنى (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (Δ) .

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f'(x) = 1$.

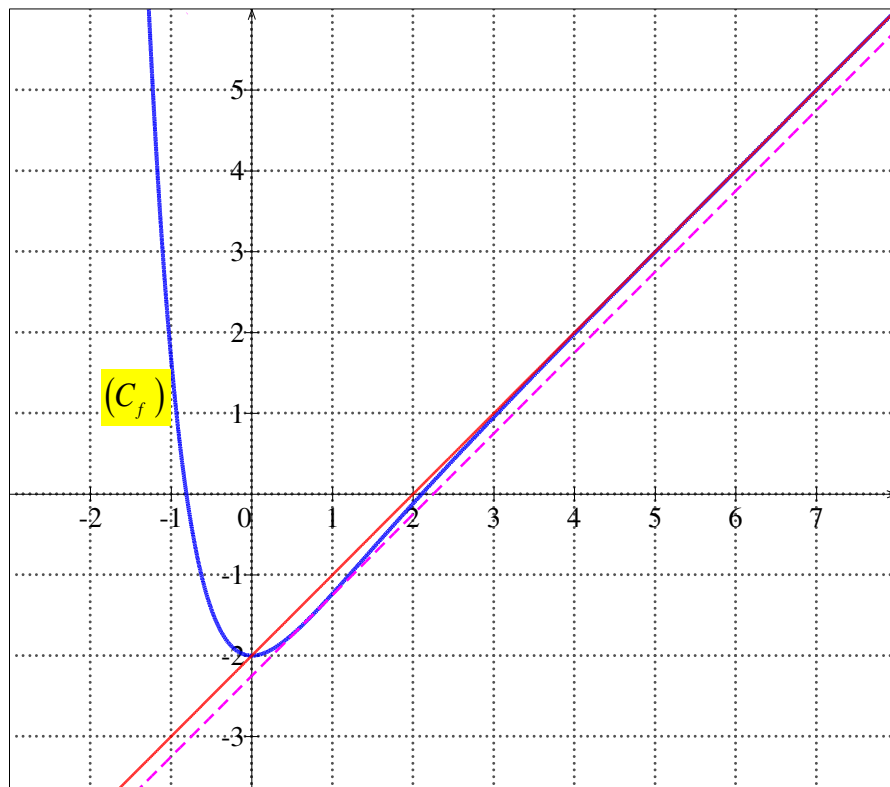
$f'(x) = 1$ تكافئ $-2e^{-2x} + e^{-x} = 0$ تكافئ $e^{-x}(-2e^{-x} + 1) = 0$ تكافئ $-2e^{-x} + 1 = 0$ تكافئ $x = \ln 2$.

كتابة معادلة المماس (T) في النقطة $A \left(\ln 2; \ln 2 - \frac{9}{4} \right)$:

لدينا : $(T) : y = f'(\ln 2)(x - \ln 2) + f(\ln 2)$ ومنه $(T) : y = x - \frac{9}{4}$.

(7) $f(-1) = e^2 - e - 3 \approx 1.67$.

الرسم :



(8) المناقشة البيانية :

- حلل المعادلة $f(x) = x - m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y = x - m$.
- إذا كان $m = \frac{9}{4}$ المعادلة تقبل حل واحد موجب.
- إذا كان $m = 2$ المعادلة تقبل حل واحد معدوم.
- إذا كان $m \in \left] 2; \frac{9}{4} \right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين.
- إذا كان $m \in \left] \frac{9}{4}; +\infty \right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.
- إذا كان $m \in]-\infty; 2[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب.

إنجاز: خالد مخاضة

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2020