



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الاول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{1}{3}$ و لكل عدد طبيعي n لدينا $u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{1+2u_n}\right)$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 1$

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها

(4) المتتالية العددية (v_n) معرفة كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n}$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- أحسب المجموع التالي: $S = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوقان U_1 و U_2 يحتوي الصندوق U_1 على كرتين سوداوين و 3 كريات بيضاء و يحتوي الصندوق U_2 على 4 كريات سوداء و 3 بيضاء كلها متشابهة الملمس . نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 و نضعها في الصندوق U_2 ثم نسحب من هذا الأخير كرتين في آن واحد .

نعتبر الحادثتين: A "الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 سوداء" و B "سحب كرتين بياضوين من الصندوق U_2 "

(1) أحسب $P(A)$ ثم بين أن $P_A(B) = \frac{3}{28}$

(2) شكل شجرة الاحتمالات المنمذجة لهذه التجربة العشوائية

(3) أحسب $P(B)$ ثم استنتج احتمال سحب كرية سوداء على الأقل من الصندوق U_2

(4) نكرر هذه التجربة أربع مرات متتالية (بمعنى نعيد الصندوقين إلى وضعهما الأول قبل إعادة التجربة في كل مرة)

ما هو احتمال الحصول على كرتين بياضوين من الصندوق U_2 مرة على الأقل؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية : $Z^2 - 4\sqrt{3}Z + 16 = 0$

ب- أكتب الحلول على الشكل الأسّي

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين

$$Z_B = 2\sqrt{3} + 2i, \quad Z_A = 2\sqrt{3} - 2i$$

علم النقطتين A, B ثم بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع

(3) نقطة لاحقتها $Z_C = -8i$ و D صورتها بواسطة الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

أ- علم النقطتين C و D ثم بين أن $D = 4\sqrt{3} + 4i$

ب- بين أن D هي صورة B بالتحاكي الذي مركزه O يطلب تحديد نسبته

ج- بين أن المثلث OAD قائم

(4) بين أن المجموعة (Γ) للنقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق : $|Z - Z_B| = |Z_A|$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 - x(\ln x)^2$

(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ كما في الشكل :

(1) بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن : $g'(x) = -(2 - \ln x)\ln x$

(2) استنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ وشكل جدول تغيراتها

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 2.1$

ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1; +\infty[$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = -x + e - \frac{1 - \ln x}{\ln x}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر الثانية هندسيا

(2) بين أنه من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$ ثم استنتج اتجاه الدالة f وشكل جدول تغيراتها

(3) بين أنه من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ فإن $f(x) = \frac{-1}{\ln x} - x + e + 1$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D)

يطلب تعيين معادلة له ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (D)

(4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e

(5) أرسم المماس (T) و المنحني (C_f) .

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{1-e}{e}x + m$

الموضوع الثاني

التمرين الاول: (04 نقاط)

(1) نعتبر العدد المركب $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

أ- بين أن : $\alpha^4 = 16i$

ب- أكتب α على الشكل المثلثي ثم استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C ذات اللاحقات

$Z_A = 2$ ، $Z_B = i$ و $Z_C = 16 + 33i$ على الترتيب

(3) أ- عين العبارة المركبة والعناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه B والذي يحول A إلى C

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC

ج- أحسب مساحة المثلث CBC' علما أن $S(C) = C'$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

وحدة إنتاجية يسيرها 12 عاملا منهم 5 نساء و 7 رجال من بينهم العامل "أحمد"

(1) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام . أ- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بهذه الكيفية؟

ب- أحسب احتمال الحوادث التالية "

A "أعضاء اللجنة نساء" ، B "اللجنة تضم على الأكثر امرأة" ، C "اللجنة تضم على الأقل رجل"

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة مشكلة عدد الرجال الموجودين بها

أ- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

ب- أحسب $P(e^{2X} - 4e^X + 3 \leq 0)$

(3) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من رئيس و نائب له و كاتب . أ- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بهذه الكيفية؟

ب- أحسب احتمال الحادثة D "أحمد عضو باللجنة"

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$$
 حيث α عدد حقيقي

(1) عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

(2) نضع في كل ما يأتي : $\alpha = 1$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$. (لاحظ أن $u_{n+1} = \sqrt{4 - \frac{4}{u_n^2 + 1}}$)

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة

3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $v_n = \frac{(u_n)^2}{3-(u_n)^2}$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n^2 = \frac{3 \times 4^n}{2+4^n}$

ج- أحسب المجموع التالي $S = \frac{1}{(u_0)^2} + \frac{1}{(u_1)^2} + \dots + \frac{1}{(u_n)^2}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x) + f(-x) = 2$. ماذا تستنتج؟

2) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب- بين أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0

4) نعتبر الدالة g المعرفة على R كما يلي : $g(x) = f(x) - (x + 1)$

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g

ب- أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

ج- استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) . ما ذا يمكن القول عن النقطة A ؟

5) أرسم كلا من (T) و (C_f)

6) أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 1}$

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمت ذات المعادلات

$$x = -2 \text{ و } x = 2, \quad y = x + 1$$

نتمنى لكم التوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا 2024