

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: علوم تجريبية

دورة: 2020

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

(1) قانون احتمال المتغير العشوائي X معرّف بالجدول المقابل :

x_i	-2	0	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X هو:

(أ) $-\frac{1}{20}$ (ب) $-\frac{1}{10}$ (ج) $-\frac{3}{20}$

(2) المتتالية العددية (w_n) معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 4 \times 5^n - 2n + 1$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$

S_n يساوي: (أ) $5^{n+1} - (n+1)^2$ (ب) $5^{n+1} - n^2$ (ج) $5^n - n^2$

(3) نعتبر المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $-2e^{2x} + 5e^x - 2 \geq 0$

مجموعة حلول هذه المتراجحة في مجموعة الأعداد الحقيقية هي:

(أ) $[-\ln 2; \ln 2]$ (ب) $[-1; -\ln 2]$ (ج) $[\ln 2; +\infty[$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي وعاء U على 4 كريّات حمراء و 6 سوداء، ويحتوي وعاء V على 5 كريّات حمراء و 3 سوداء وكل الكريّات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا كريّتين في آن واحد من أحد الوعاءين بالكيفية التالية:

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة ومرقمة من 1 إلى 6 ، إذا حصلنا على أحد الرقمين 3 أو 5 نسحب الكريّتين من U و في باقي الحالات نسحب الكريّتين من V .

نسمّي الحدث: " الحصول على أحد الرقمين 3 أو 5 " .

نسمّي M الحدث: " الحصول على كريّتين من نفس اللون ".

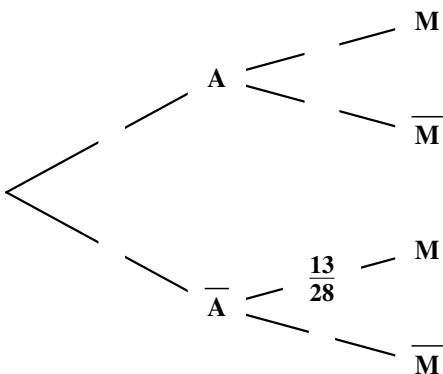
(1) تحقق أنّ $P(\bar{A})$ احتمال السّحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$.

(2) علماً أنّ الكريّتين المسحوبتين من U ، بيّن أنّ احتمال أن تكونا

من نفس اللون هو $\frac{7}{15}$.

(3) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها واستنتج $P(M)$.

(4) احسب $P_M(A)$ احتمال السّحب من الوعاء U علماً أنّ الكريّتين المسحوبتين مختلفتا اللون؟



التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي)، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$.
(1) نفرض أن $\alpha = -4$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -4$.

(2) نفرض أن $\alpha \neq -4$.

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + 4$.

أ. أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

ب. اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثم بين أن المتتالية (u_n) متقاربة.

ج. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

احسب S_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$.

$(\mathcal{C}_f)$ التمثيل البياني لـ f في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (تؤخذ وحدة الطول $2cm$)

(1) أ. احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسّر النتيجة هندسيا ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ب. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

ج. ادرس وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(2) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

أ. بين أن g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

ب. احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

(3) أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) بين أن التمثيل البياني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، ويطلب تعيين معادلة له.

(5) أنشئ (T) ، (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$.

(6) الدالة العددية h معرفة على $]0; +\infty[\cup]-\infty; 0[$ بـ : $h(x) = -|x| + 1 + \frac{\ln|x|}{x^2}$.

أ. بين أن h دالة زوجية.

ب. اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقاً من (C_f) . (لا يُطلب إنشاء (C_h)).

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

عَيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

- (1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالشكل: $f(x) = -x + \ln x$.
على المجال $]0; +\infty[$ ، الدالة f :

أ (متزايدة تماما) ب (متناقصة تماما) ج (غير رتيبة)

- (2) يتكون فريق عمل من 4 إناث و 3 ذكور، يراد تشكيل لجنة تضم 3 أعضاء.
احتمال أن تكون اللجنة من الجنسين هو:

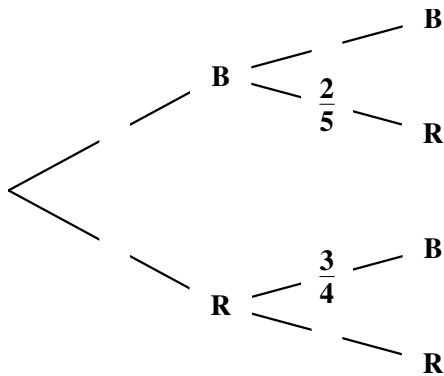
أ ($\frac{6}{7}$) ب ($\frac{4}{7}$) ج ($\frac{1}{7}$)

- (3) لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول u_0 ، حيث: $u_0 = e^{-\frac{1}{2}}$. (أساس اللوغاريتم النيبيري)
من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)$
 S_n يساوي:

أ ($\frac{n^2 - 1}{2}$) ب ($\frac{n^2 + 1}{2}$) ج ($\frac{n^2}{2}$)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به ثلاث كريات بيضاء وكريتين حمراوين لا نميّز بينها عند اللمس، نسحب عشوائيا كريتين على التوالي من الكيس بالكيفية التالية: إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت حمراء لا نعيدها إلى الكيس .
(1) أ. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها.



B يرمز إلى الحصول على كرية بيضاء و R إلى الحصول على كرية حمراء.

ب. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الثانية حمراء.

- (2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

أ. عَيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

ب. بيّن أن: $P(X = 1) = \frac{27}{50}$ ، ثم عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ج. احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

(1) احسب كلا من u_1 و u_2 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = u_n - n + 1$.

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3، يُطلب حساب حدّها الأول.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + n^2 - n - 3)$.

ب. احسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

في الشكل المرفق، (Γ) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 2x^2 + 2x - 2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة: $x \mapsto e^x$.

بقراءة بيانية:

(1) برّر أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x - x > 0$

(2) حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ علما أن $g(0) = 0$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ واحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

(2) أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

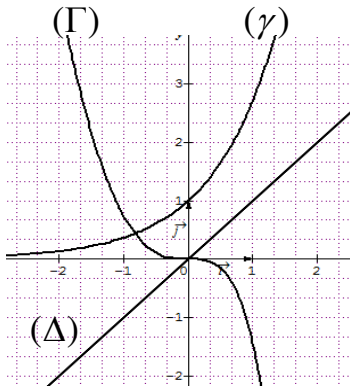
(3) أ. اكتب معادلة (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0.

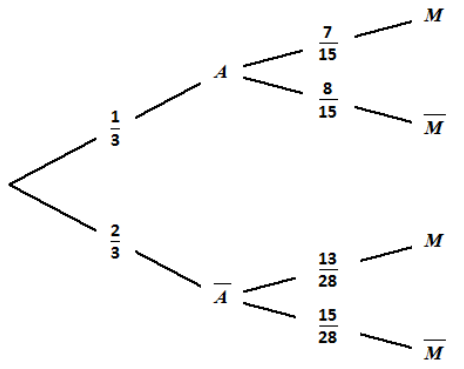
ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f(x) - (2x + 1) = \frac{g(x)}{e^x - x}$.

ج. استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$ ، ماذا تمثل النقطة A بالنسبة إلى (C_f) ؟

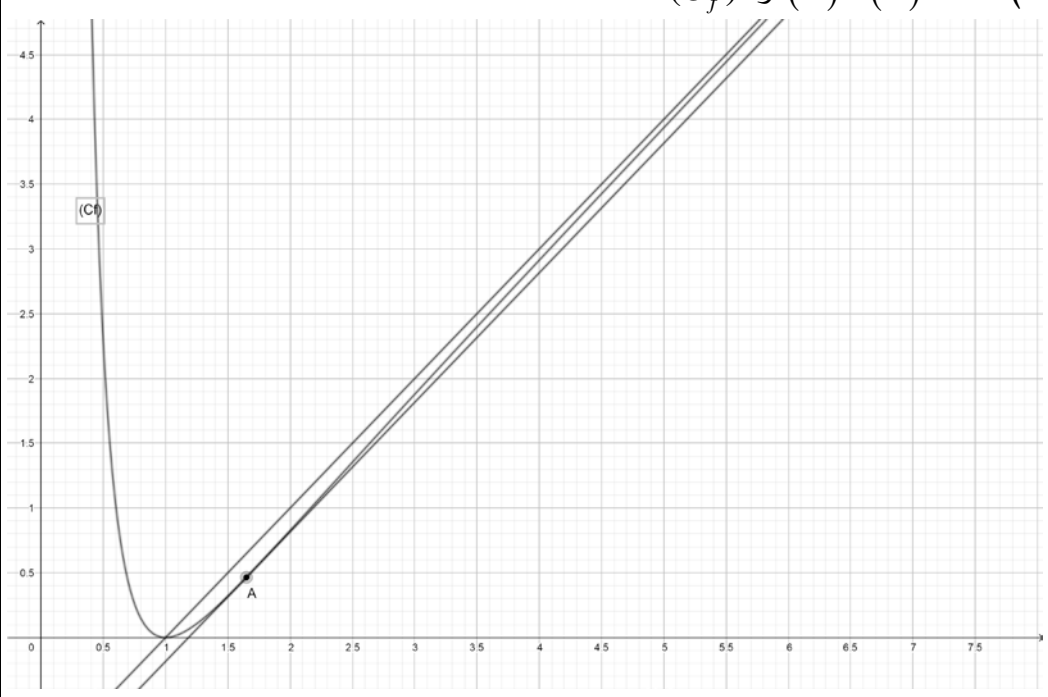
(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 1]$ ، ثم تحقق أن: $-0.6 < \alpha < -0.5$.

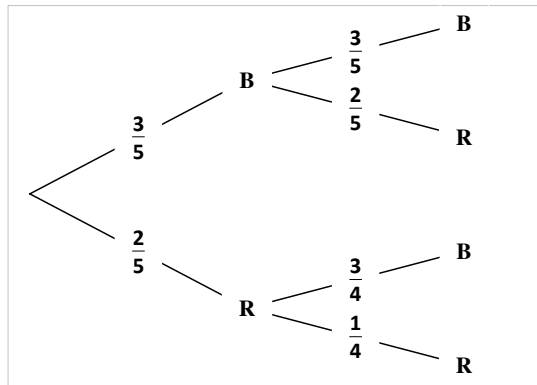
(5) أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f) .



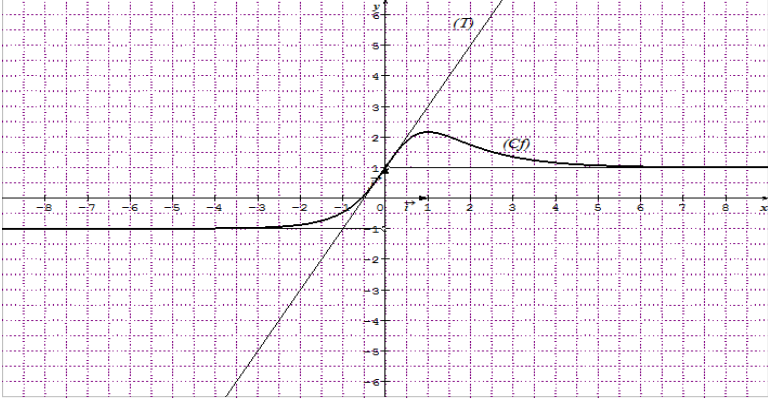
العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموعة	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1	2x0.5	(1) الاقتراح الصحيح: ج) $E(X) = -\frac{3}{20}$ ، التبرير .
1.5	0.5+1	(2) الاقتراح الصحيح: ب) $5^{n+1} - n^2$ التبرير: $S_n = 4(1 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n) - 2(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) = 5^{n+1} - n^2$
1.5	0.5+1	(3) الاقتراح الصحيح: أ) $[-\ln 2; \ln 2]$ التبرير: $-2e^{2x} + 5e^x - 2 \geq 0$ تكافئ $(e^x - 2)(2e^x - 1) \leq 0$
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
0.5	0.5	(1) $P(\overline{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
0.75	0.75	(2) $P_A(M) = \frac{C_4^2 + C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{6 + 15}{45} = \frac{7}{15}$
1.75	1	(3) شجرة الاحتمالات:
	0.75	 الاستنتاج: $P(M) = P(A) \times P_A(M) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(M) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{15} + \frac{2}{3} \times \frac{13}{28} = \frac{293}{630}$
1	0.25x4	(4) $P_{\overline{M}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{8}{15}}{1 - \frac{293}{630}} = \frac{8}{45} \times \frac{630}{337} = \frac{112}{337}$
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
1	0.25 + 0.75	(1) لدينا: $u_0 = -4$ ، من أجل n كفي من $\mathbb{N}$ نفرض أن: $u_n = -4$ ، نجد: $u_{n+1} = -4$ ، بالتالي من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = -4$.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموعة	مجموعة	
4	0.75	(2) أ) لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{3}{4}(u_n + 4) = \frac{3}{4}v_n$
	0.5+0.25 0.5 0.5	ب) نجد: $v_0 = \alpha + 4$ و $v_n = (\alpha + 4)\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ومنه: $u_n = (\alpha + 4)\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4$ لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -4$ أي (u_n) متقاربة.
	1 0.5	ج) نجد: $S_n = 4 \left[(\alpha + 4) \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} \right) - (n+1) \right]$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$
		التمرين الرابع: (07 نقاط)
2	0.5 0.25 0.5	1) أ) بالحساب نجد: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ التفسير: المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب لـ (C_f) ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$
	0.25	ب) لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x^2} = 0$ مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$
	0.5	ج) المنحنى (C_f) فوق (Δ) على المجال $]0;1[$ ، المنحنى (C_f) تحت (Δ) على المجال $]1;+\infty[$ و $(C_f) \cap (\Delta) = \{A(1;0)\}$
1.5	0.25x2 0.25 0.25 0.5	(2) أ) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$ و $g'(x) > 0$ بالتالي g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ب) لدينا: $g(1) = 0$ و بما أن g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ نجد: $g(x) < 0$ على المجال $]0;1[$ و $g(x) > 0$ على المجال $]1;+\infty[$
	0.5 0.5 0.25	(3) أ) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{1-2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$ ب) الدالة f متناقصة تماما على $]0;1[$ ومتزايدة تماما على $]1;+\infty[$ جدول التغيرات
	0.25 0.25	(4) لدينا $f'(x) = 1$ تعني $1 - 2\ln x = 0$ أي $x = \sqrt{e}$ بالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) معادلة له $y = x - 1 - \frac{1}{2e}$

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموعة	مجزأة	
1	0.25x2	(5) انشاء (T)، (Δ) و (C_f) 
	0.5	
0.75	0.25	(6) أ (بيان أن h دالة زوجية
	0.25	ب) لدينا $\begin{cases} h(x) = -f(x) ; x > 0 \\ h(x) = x + 1 + \frac{\ln(-x)}{x^2} ; x < 0 \end{cases}$ ومنه:
	0.25	على المجال $]0; +\infty[$ يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ونحصل على (C_h) على المجال $]-\infty; 0[$ بالتناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموعة	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1.5	1+0.5	(1) الاقتراح الصحيح: (ج) غير رتيبة. التبرير: $f'(x) = \frac{1-x}{x}$ و f' تغير إشارتها على المجال $]0; +\infty[$
1	0.5+0.5	(2) الاقتراح الصحيح: (أ) $\frac{6}{7}$ ، التبرير: $P = \frac{C_3^1 \times C_4^2 + C_3^2 \times C_4^1}{C_7^3} = \frac{6}{7}$
1.5	1+0.5	(3) الاقتراح الصحيح: (أ) $\frac{n^2-1}{2}$ ، التبرير: $\ln(u_n) = n - \frac{1}{2}$ و $S_n = (0 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2}) + (2 - \frac{1}{2}) + \dots + (n - \frac{1}{2}) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{2}$
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1.5	0.25x4	(1) (أ) شجرة الاحتمالات: 
	0.5	(ب) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الثانية حمراء: $P = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{17}{50}$
2.5	0.5	(2) (أ) مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي: $\{0;1;2\}$.
	3x0.5	(ب) لدينا: $P(X=1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{50}$ ونجد: $P(X=2) = \frac{1}{10}$ و $P(X=0) = \frac{9}{25}$
	0.25x2	(ج) نجد: $E(X) = \frac{37}{50}$
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
0.75	0.25x3	(1) نجد: $u_1 = 3$ و $u_2 = 9$ ، التخمين: (u_n) متزايدة تماما.
2.75	0.25+1	(2) (أ) نجد: $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 1 = 3v_n$ بالتالي (v_n) هندسية أساسها 3 و $v_0 = 1$
	0.5+0.5	(ب) نجد: $v_n = 3^n$ و $u_n = 3^n + n - 1$
	0.25x2	(ج) لدينا: $u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^n + 1$ متزايدة تماما

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموعة	مجزأة	
1.5		(3 أ) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $S_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + (-1 + 0 + 1 + \dots + (n-1))$ $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + n^2 - n - 3)$ إذن:
	0.25x2 0.5	
	0.5	ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
0.25	0.25	(I1) لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x - x > 0$ لأن (γ) يقع فوق (Δ) على $\mathbb{R}$
0.25	0.25	(2) على $]0; +\infty[$ لدينا: $g(x) > 0$ و على $]0; +\infty[$ لدينا : $g(x) < 0$
1	2x0.25 2x0.25	(II1) لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{2}{1 - xe^{-x}} \right) = 1$ التفسير: $y = 1$ و $y = -1$ معادلتا مستقيمين مقاربين لـ: (C_f)
1.75	0.5	(2 أ) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = \frac{2e^x(e^x - x) - 2e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$
	0.5 2x0.25 0.25	ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1 - x)$ بالتالي: الدالة f متزايدة تماما على $]1; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0; 1[$. جدول التغيرات. $f(1) = \frac{e+1}{e-1}$
	0.5	(3 أ) معادلة للمماس (T) : $y = 2x + 1$
1.75	0.5	ب) بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - (2x + 1) = \frac{g(x)}{e^x - x}$
	0.5	ج) المنحنى (C_f) فوق (T) على المجال $]0; +\infty[$ ، المنحنى (C_f) تحت (T) على المجال $]0; +\infty[$ و $A(0;1) \in (C_f) \cap (T)$
	0.25	نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)
0.75	0.5 0.25	(4) بيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; 1[$ التحقق أن: $-0.6 < \alpha < -0.5$.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموعة	مجزأة	
1.25	0.25	(5) انشاء (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f) 
	2x0.25	
	0.5	